ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Примеры работ учащихся МОУ «Лицей №43» г.о. Саранск

Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 43» г.о. Саранск

Исследовательская работа

ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ УМНОЖЕНИЕ

Выполнили: ученица 5а класса
Журавлева Екатерина,
ученица 5а класса
Лысаковская Дарья

Научный руководитель:
учитель математики
МОУ «Лицей № 43»
Силаева Светлана Анатольевна

Саранск, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Мало кто из учащихся задумывается, что современные способы выполнения арифметических действий не всегда были так просты и удобны, легко и быстро приводили к результату. Наши предки использовали гораздо более громоздкие и медленные приемы. И если бы школьник XXI века мог перенестись на несколько веков назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок.

При решении ряда задач по математике бывает необходимо быстро умножить большие числа, встречающиеся в этих задачах. Мы уже знакомились с несколькими приемами более рационального сложения чисел, основанном на их свойствах. Но есть и способы быстрого умножения чисел. Кроме того, изучая книги для дополнительного чтения по математике, мы узнали, что математические закономерности могут быть и занимательными (существуют математические фокусы), и даже красивыми. Многие интересные и полезные в современных условиях способы умножения содержатся в работах по истории математики.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: выделить приемы умножения чисел, которые не изучаются в школьном курсе, но могут помочь учащимся при решении математических задач.

ЗАДАЧИ РАБОТЫ: изучить литературу по теме «Умножение чисел»; выявить полезные приемы умножения чисел из работ по истории математики, которые могут быть применены современными школьниками; собрать из математической литературы приемы быстрого умножения; привести примеры математических фокусов и красивых закономерностей умножения.

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ: действия умножения натуральных чисел.

ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ: приемы рационального умножения натуральных чисел.

ГИПОТЕЗА ИССЛЕДОВАНИЯ: умножение натуральных чисел можно выполнять рациональными способами.

Для достижения поставленных задач нами использовались следующие **методы исследования:** анализ литературы по теме «Умножение натуральных чисел», изучение литературы по истории математики и вычисления.

1. ПРИЕМЫ БЫСТРОГО УМНОЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Прием быстрого умножения на 5 (50). Чтобы умножить число на 5 (50), надо разделить его на 2 и умножить на 10 (100).

Например,

446·5=446:2·10=2230,

4672·50=46672:2·100=233600.

Прием быстрого умножения на 25 (250). Чтобы умножить число на 25 (250), надо умножить его на 100 (1000) и разделить его на 4.

Например,

88·25=8800:4=2200,

24·250=24000:4=6000.

Прием быстрого умножения на 125. Чтобы умножить число на 125, надо умножить его на 1000 и разделить его на 8.

Например,

384·125=384000:8=48000.

Прием быстрого умножения на 9 (99 или 999). Чтобы умножить число на 9 (99 или 999), надо умножить его на 10 (100 или 1000) и вычесть из произведения заданное число.

Например,

254·9=254·(10-1)=2540-254=2286,

324·99=254·(100-1)=32400-324=32076,

546·999=546·(1000-1)=546000-546=545 454**.**

Прием быстрого умножения на 11. При умножении двухзначного числа на 11 возможны два случая.

1. Сумма цифр числа, умножаемого на 11, меньше 10. В этом случае надо между ними вставить их сумму:

17 ·11=1 (1+7)7=187;   81·11=8(8+1)=891.

2. Сумма цифр числа, умножаемого на 11, больше 9. В этом случае надо между ними вставить количество единиц в сумме цифр данного числа, а первую цифру множимого числа увеличить на 1:

28·11=(2+1)08=308;   94·11=(9+1)34+1034.

Прием быстрого возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5. Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся на 5, надо, отбросив 5, перемножить оставшееся число десятков на следующее по порядку число и к результату приписать 25.

Например, чтобы 395 умножить на 395, надо умножить 39 на 40, а это 1560, и приписать справа 25, т.е. $395 \cdot 395 = 156025$.

Прием быстрого возведения в квадрат трехзначных чисел, оканчивающихся на 25. Для получения квадрата трехзначного числа (например, 325) надо:

1) пишем в конце 625;
2) число сотен (30 умножаем на 5, у полученного числа (15) последнюю цифру (5) пишем впереди числа 625, а первую цифру (1) запоминаем;
3) число сотен данного числа (3) возводим в квадрат ($3 \cdot 3 = 9$) и прибавляем ту цифру, которую только что запомнили (9+1), а полученный результат (10) пишем впереди написанных нами чисел : 105 625.

Прием быстрого возведения в квадрат числа пятого и шестого десятков.

Чтобы возвести в квадрат число пятого десятка (41, 42, .., 49), надо к числу единиц прибавить 15, затем к полученной сумме приписать квадрат дополнения числа единиц до 10 (если этот квадрат – однозначное число, то перед ним приписывается 0).

Например, $43^2 = (15+3) \cdot 100 + 7^2 = 1849$,

$48^2 = (15+8) \cdot 100 + 2^2 = 2304$.

Еще проще возвести в квадрат число шестого десятка (51, 52, .., 59). Для этого надо к числу единиц прибавить 25 и к этой сумме приписать квадрат числа единиц.

Например, $54^2 = (25+4) \cdot 100 + 4^2 = 2916$,

$57^2 = (25+7) \cdot 100 + 7^2 = 3249$.

Прием быстрого возведения в квадрат двузначных чисел. Этот прием основан на следующих преобразованиях:

$а^2 = а^2 - в^2 + в^2 = (а-в) \cdot (а+в) + в^2$.

Например, $27^2 = (27-3) \cdot (27+3) + 3^2 = 24 \cdot 30 + 9 = 729$.

2. **ИЗ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ. СТАРИННЫЕ ПРИЕМЫ УМНОЖЕНИЯ**

Действия умножения да и деления в старину были особенно сложны и трудны. Об этом люди даже сложили поговорки. «Умножение – мое мучение, а с делением – беда». «Трудное дело деление», - гласила старинная итальянская поговорка. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно чуть не дюжина различных способов умножения и деления. Приемы, которые применялись в то время, были очень запутанными, твердо запомнить которые часто не в силах был человек средних способностей. В книге В. Беллюстина «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1914 г.) изложено 27 способов умножения. И все эти приемы умножения: «шахматный или органчиком», «загибанием», «по частям или разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «алмазом» и прочие, а также способы деления, носившие не менее затейливые названия, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Но среди них можно выбрать ряд таких способов, которые и сегодня можно применять современным школьникам.

Счет по пальцам широко применялся в старину. Использовали его и для умножения. Вот как умножали древние римляне на пальцах числа, содержащиеся между 5 и 10.

Пусть требуется умножить 6 на 7. Считаем на пальцах левой руки, согнутой в кулак, до 6, разгибая по одному пальцу, а на правой то же до 7. Два каких-то разогнутых пальца правой руки кладем на разогнутый палец левой. Всего 3 разогнутых пальца, это – 3 десятка – 30. Остальные 4 (согнутых пальца левой руки) перемножаются на 3 (согнутых пальца правой), получаем 12. Итак, 30+12=42.

Аналогично:

$6 \cdot 8=(1+3)\ 10+4 \cdot 2=48$,

$6 \cdot 9=(1+4)\ 10+4 \cdot 1=54$.

Пальцевой счет был широко распространен в практической жизни и в средние века. Ирландский ученый монах Беда Достопочтенный(673-735), написавший книгу «О счете времени», посвятил целую главу счету на пальцах.

Вот как производилось, например, умножение 13 на 14.

1) Известно, что 10·10=100.
2) Откладывают (загибают) на одной руке 3, на другой – 4 пальца.
3) 3+4=7, это – десятки, т.е. 7·10=70.
4) 3·4=12.
5) Тогда 13·14=10·10+7·10+3·4=182.

Интересный прием умножения и деления содержится в египетских папирусах. Он сводится к последовательному удваиванию и сложению. Иногда применялось умножение на 10 и сложение.

Приведем пример. Надо умножить 15·13.

Решение. Составляем два столбца, во главе первого стоит 1, а второго – множимое 15. Эти числа последовательно удваиваются до тех пор, пока в первом станет возможным, суммируя некоторые из его членов, получить в сумме множитель 13. Сумма соответствующих чисел второго столбца и дает произведение 195.

'1 '15

2 30

'4 '60

'8 '120

————

13 195

Деление сводится к умножению в обратном направлении:

195:15=(15+60+120):15=1+4+8=13.

К староегипетскому близок так называемый «русский крестьянский способ умножения», применявшийся крестьянами в дореволюционной деревне. Этот способ не требовал знания всей таблицы умножения. Он основан на последовательной замене произведения двух сомножителей, при котором один из них повторно удваивается, а другой раздваивается до единицы.

Рис.1

Перемножим числа 987 и 1998 этим способом.

Напишем одно из чисел слева, а второе – справа на одной строчке. Левое число будем делить на 2, а правое – умножать на 2 и результаты записывать в столбик.

Если при делении возникает остаток (т.е. делимое окажется нечетным числом), то он отбрасывается. Умножение и деление на 2 продолжаем до тех пор, пока слева не останется 1. Затем вычеркиваем те строчки столбиков, в которых слева стоят четные числа. Теперь сложим оставшиеся числа в правом столбце – получим 1 972 026. Это и есть произведение перемножаемых чисел.

Данный способ дает верный результат потому, что он непосредственно связан с представлением одного из сомножителей, а именно первого, в двоичной системе счисления.

За тысячелетия развития математики было придумано множество способов умножения чисел. Итальянский математик Лука Пачолли в своем трактате «Сумма знаний по арифметике, отношениям и пропорциональности» (1494 г.) приводит восемь способов умножения. Один из них носит название «ревность, или решетчатое умножение».

Сначала рисуется прямоугольник, разделенный на квадраты, причем размеры сторон прямоугольника соответствуют числу десятичных знаков у множимого и множителя. Затем квадратные клетки делятся на диагонали, и «…получается картинка, похожая на решетчатые ставни – жалюзи, - пишет Пачолли. - Такие ставни вешались на окна венецианских домов, мешая уличным прохожим видеть сидящих у окон дам и монахинь».

Перемножим этим способом числа 1998 и 987. Для этого запишем вверху таблицы число 987, а слева – 1998, как показано на рис.

Теперь в каждый квадратик впишем произведение цифр – сомножителей, расположенных в одной строке и в одном столбце с этим квадратиком. Десятки располагаются в нижнем треугольнике, а единицы – в верхнем. После того, как все треугольники заполнены, цифры в них складываются вдоль каждой диагонали. Результаты записываются справа и снизу от таблицы – получается 1 972 026.

Другой способ называется «маленький замок». Сначала, как мы и привыкли, одно число записывается под другим, но затем цифры верхнего числа поочередно умножаются на нижнее число, причем начинают с цифры старшего разряда и каждый раз добавляют нужное число нулей.

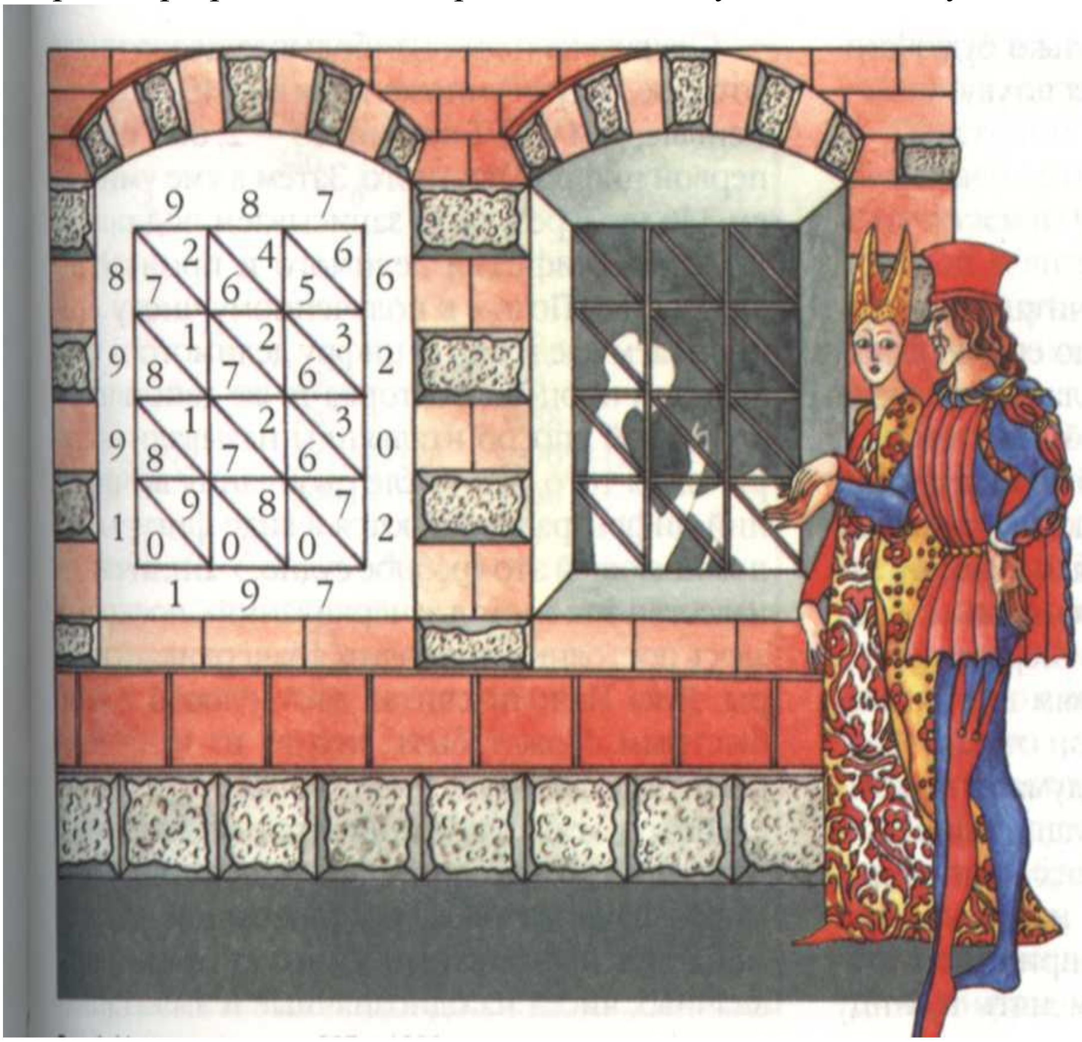


Рис. 2

Рис. 3

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметических действий, наши предшественники считали необходимым непременно проверить полученный результат. Любимым приемом проверки был так называемый «способ девятки». Заметим, что в некоторых иностранных учебниках этот прием встречается и сейчас.

Проверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое – либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно такой же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также, что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа. Например, 758 при делении на 9 дает остаток 2, и то же получается в остатке от деления (7+5+8) на 9.

Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность сложения следующего столбца:

38 932……….7
\+ 1 096……….7
4 710 043……….1
589 106……….2
5 339 177……….8

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно двузначных числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока в конечном результате не получим однозначное число. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующими слагаемыми. Складываем все остатки (7+7+1+2=17; 1+7=8), -получаем 8.

Такова же должна быть сумма цифр итога (5 339 177), если действие выполнено верно: 5+3+3+9+1+7+7, после всех упрощений, равно 8.

Проверка вычитания выполняется точно так же.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОКУСЫ

МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ ТРЕХЗНАЧНОГО ЧИСЛА НА 999.

Можно мгновенно умножить любое трехзначное число на 999. Например, $573 \cdot 999 = 572427$.

Разгадка фокуса. В результате умножения получается шестизначное произведение: первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на единицу, а остальные три цифры (кроме последней) – «дополнения» первых до 9. Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$573 \cdot 999 = 573 \cdot (1000-1) = 573000-573 = 572427$.

ЧИСЛО ШЕХЕРЕЗАДЫ. Напишите на бумажке (не показывая) трехзначное число, а затем припишите еще раз то же самое число. Полученное шестизначное число разделите сами (или предложите любому другому) разделить, не показывая, без остатка на 7. Результат деления еще раз разделите сами (или передав другому ученику) без остатка на 11, а затем на 13. После троекратного деления должно получиться загаданное число.

Разгадка фокуса. Вспомним, что приписать к трехзначному числу его само – значит, умножить его на 1001 – число Шехерезады. Но $1001=7 \cdot 11 \cdot 13$. а в результате деления последовательно на эти три числа оно должно снова дать полученное число.

Замечание 1. Другой вариант этого же фокуса можно предложить в следующем виде**.** Напишите на бумажке (не показывая) трехзначное число, а затем припишите еще раз то же самое число. Полученное шестизначное число разделите сами (или предложите любому другому) разделить, не показывая, без остатка на 11, потом на задуманное число и на 13. В итоге должно получиться 7.

Замечание 2. Аналогичный фокус необычного отгадывания можно предложить и с числом 10 101: $10\ 101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Тогда возможны разнообразные сочетания вариант множителей и получаются несколько фокусов.

Замечание 3. Аналогичный фокус можно предложить и с числом 10 001.10 101= $73 \cdot 137$.

Замечание 4. Аналогичный фокус можно предложить и с числом $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Тогда снова возможны разнообразные сочетания вариант множителей и получаются несколько фокусов.

4. ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ УМНОЖЕНИЕ

Приведем примеры удивительных произведений.

$11 \cdot 11=121$

$111 \cdot 111=12321$

$1111 \cdot 1111=1234321$

$11111 \cdot 11111=123454321$

………

$111111111 \cdot 111111111=12345678987654321$

$1 \cdot 9+2=11$

$12 \cdot 9+3=111$

$123 \cdot 9+4=1111$

$1234 \cdot 9+5=11111$

$123456 \cdot 9+6=111111$

$9 \cdot 9+7=88$

$98 \cdot 9+6=888$

$987 \cdot 9+5=8888$

$9876 \cdot 9+4=88888$

$98765 \cdot 9+3=888888$

$987654 \cdot 9+2=8888888$

$9876543 \cdot 9+1=88888888$

$98765432 \cdot 9+0=888888888$

$1 \cdot 8+1=9$

$12 \cdot 8+2=98$

$123 \cdot 8+3=987$

$1234 \cdot 8+4=9876$

$12345 \cdot 8+5=98765$

$123456 \cdot 8+6=987654$

$1234567 \cdot 8+7=9876543$

$12345678 \cdot 8+8=98765432$

$123456789 \cdot 8+9=987654321$

5. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Сколько нулей стоит в конце произведения всех натуральных чисел от 10 до 25?

Решение. Предположим, что это произведение разложили на простые множители. Так как нуль на конце произведения образуется при умножении 5 на 2, то нулей будет столько, сколько раз можно выделить это произведение из разложения на простые множители. Для подсчета числа нулей на конце произведения достаточно посчитать количество пятерок в разложении данного произведения на простые множители: их 5 (в числах 10, 15, 20, 25). Значит, произведение будет оканчиваться пятью нулями.

Задача 2. Брат и сестра пишут цифры со старшего разряда по порядку вплоть до младшего. Начинать с нуля нельзя, а остальные числа совершенно произвольные. Если записанное число разделить нацело на 11, то победителем объявляется написавший последнюю цифру, а если не разделится, то победителем будет написавший предпоследнюю цифру. Кто выиграет при правильной игре, если всего должно быть записано 6 цифр.

Решение. Выиграет второй игрок, если каждым своим ходом будет повторять цифру, записанную соперником. В этом случае получается число вида $\overline{aabbcc}$, которое всегда делится на 11.

Задача 3. Во сколько раз увеличится двузначное число, если справа приписать такое же число. ***Ответ.*** В 101 раз.

Задача 4. Сравните дроби $\frac{23232323}{55555555}$ и $\frac{23}{55}$. ***Ответ.*** Равны.

Задача 5. Докажите, что число, записанное шестью одинаковыми цифрами, делится на 3, 7, 11, 13 и 37.

Решение. $\overline{\text{àààààà}} = 111111 \cdot a = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37\, a.$

Задача 6. Восстановите запись:

```
  6*
 x
  **
 ----
+ **
 **
 ----
 **6
```

Решение. Учитываем, что при умножении двузначного числа, начинающегося с цифры 6, на однозначное, двузначное получается только в том случае, когда однозначный множитель равен 1. Получается, что каждая цифра второго множителя равна 1.

ВЫВОДЫ

1. В книгах по истории математики нами найдены интересные способы умножения чисел различных народов и эпох, которые и сегодня можно применять современным школьникам.

2. Приемы быстрого умножения могут помочь ученикам, как на уроках математики, так и в повседневной жизни.

3. Приемы быстрого умножения лежат и в основе удивительных математических фокусов.

4. Приемы быстрого умножения являются не только основой занимательных задач, но и необходимы при решении задач серьезных (олимпиадных, повышенного уровня сложности и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Депман И.Я. , Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 классов. М.: Просвещение, 1999.
2. Депман И.Я. История арифметики. М.: Просвещение, 1965.
3. Балк М.Б., Балк Г.Т. Математика после уроков. М.: Просвещение,1971.
4. Глейзер Г.И. История математики в школе. 4-6 кл. М.: Просвещение, 1981
5. Энциклопедия для детей. т.11. Математика. /Глав.ред.Т.,И. Аксенова. «Аванта +» , 1998.

Муниципальное общеобразовательное учреждение «Лицей № 43»

Исследовательская работа

Симметрия орнамента вышивки мордовского национального костюма

Выполнила:
ученица 6 класса
МОУ «Лицей № 43»
Сыресина Александра

Научный руководитель:
учитель математики
МОУ «Лицей № 43»
Лобанова Ольга Евгеньевна

Саранск, 2007

Содержание

Введение

"Симметрия, как бы широко или узко мы не понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство".

Герман Вейль

На протяжении многих столетий оттачивалось народное художественное мастерство мордовского народа. История мордвы нашла свое отражение в декоративно-прикладном искусстве, древние традиции которого получили свое яркое воплощение в шитье бисером, художественной обработке дерева, в узорном ткачестве и аппликации. Но наиболее яркой и выразительной была вышивка. Ее самобытность и высокие художественные достоинства привлекли наше внимание. А сложность орнаментальных форм дает нам возможность показать красоту математики, ее органичность в окружающем нас мире. В данной работе нами рассмотрены состав орнаментального мотива композиция и типовой состав вышивки мордовского костюма с точки зрения математики, применяя свойства загадочной симметрии.

Симметрия с древних времен привлекает к себе внимание людей. В наблюдаемой симметрии природных форм находили подтверждение разумного устройства мироздания, в ней искали суть красоты, свидетельство гармонии. Симметрия принадлежит и миру человека в его творениях, в его мышлении и миру природы в ее образах, она прокладывает мост между человеком и природой.

Для исследования нами был выбран орнамент вышивки двух групп предметов женского мордовского костюма, как наиболее устойчивых и традиционных по покрою и расположению вышивок. В первую группу входят нательная рубаха и распашная одежда, во вторую группу – головные уборы.

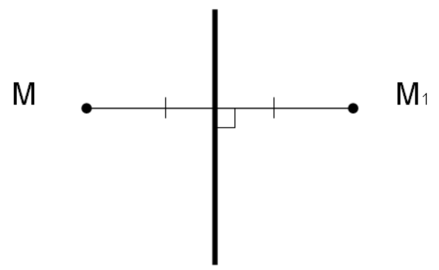
1. Понятие симметрии.

Фундаментальным понятием науки, которое наряду с понятием "гармонии" имеет отношение практически ко всем структурам природы, науки и искусства, является "симметрия".

Выдающийся математик Герман Вейль высоко оценил роль симметрии в современной науке: "Симметрия, как бы широко или узко мы не понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство".

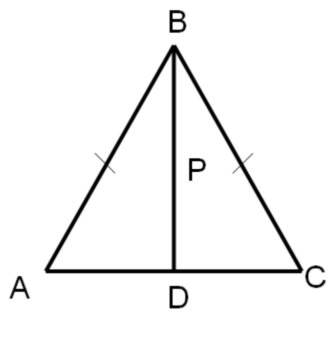
Что же такое симметрия? Когда мы смотрим в зеркало, мы наблюдаем в нем свое отражение - это пример зеркальной симметрии.

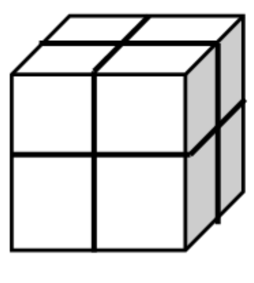
В наиболее общем виде под симметрией в математике понимается такое преобразование пространства (плоскости), при котором каждая точка M переходит в другую точку M_1 относительно некоторой плоскости (или прямой), когда отрезок MM_1 является перпендикулярным плоскости (или прямой) и делится ею пополам. Плоскость (прямая) называется при этом плоскостью (или осью) симметрии.



К фундаментальным понятиям симметрии относятся плоскость симметрии, ось симметрии, центр симметрии.

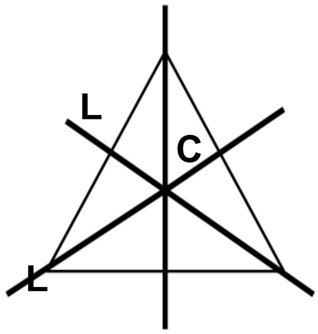
Плоскостью симметрии P называется такая плоскость, которая делит фигуру на две зеркально равные части, расположенные друг относительно друга так, как предмет и его зеркальное отражение. Например, изображенный на рисунке слева равнобедренный треугольник ABC высотой BD разделяется на две зеркально равные половины ABD и BCD, а справа изображен также прямоугольный параллелепипед (кирпичик, спичечный коробок), который имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии.





Осью симметрии называется такая прямая линия, вокруг которой симметричная фигура может быть повернута несколько раз таким образом, что каждый раз фигура "самосовмещается" сама с собой в пространстве.

Например, равносторонний треугольник имеет три оси симметрии L, то есть существуют три способа поворота треугольника вокруг оси, при котором происходит его "самосовмещение".



Наконец, центром симметрии С называется такая особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что любая проведенная через точку прямая по обе стороны от нее и на равных расстояниях встречает одинаковые (соответственные) точки фигуры. "Идеальным" примером такой фигуры является шар, центр которого и является его центром симметрии.

Симметрия широко встречается в объектах живой и неживой природы. На явление симметрии в живой природе обратили внимание еще пифагорейцы в связи с развитием ими учения о гармонии.

Принцип "симметрии" широко используется в искусстве. Бордюры, используемые в архитектурных и скульптурных произведениях, орнаменты, используемы в прикладном искусстве, - все это примеры использования симметрии.

2. Симметрия, как основной принцип построения орнамента.

Расположение орнаментов на одежде и головных уборах мордовского костюма не является произвольным, а выстраиваются в зависимости от формы и размеров орнаментируемой площади с применением симметрии: осевой (симметрия относительно прямой), центральной (симметрия относительно точки) и зеркальной (симметрия относительно плоскости) симметрий. Для орнамента мордовской вышивки характерны такие виды симметрии, как бордюр, розетка и сетка.

Весьма распространенным видом симметрии в мордовском орнаменте является бордюр. Бордюр – это линейный орнамент, полученный параллельным переносом некоторой фигуры. Линейный орнамент обычно применяется там, где нужно ограничить какую-то поверхность или разбить ее на части. На практике бордюр может строиться не только по прямой, но и вдоль ломаной или изогнутой линии. В любом случае параллельный перенос совершается, следуя изгибам и переломам оси. Бордюр, кроме симметрии параллельного переноса, может обладать и другими элементами симметрии. Они возникают в тех случаях, когда тот или иной вид симметрии присущ каждому отдельно взятому элементарному мотиву орнамента.

Существует семь видов бордюров, которые различаются направлением переноса по осям и плоскостям симметрии.

Сравнивая орнаменты вышивок на мордовских костюмах с характеристиками бордюров, можно отметить, что чаще всего используются орнаментальные полосы, полученные переносом симметричной фигуры вдоль прямой линии в одном и том же направлении при одинаковом расстоянии между двумя соседними (прил.1 рис 1, 2).

Применяется в вышивке практически во всех частях одежды и головных уборов, подчеркивая их контуры, выделяя (или маскируя) швы, усиливая значения горизонтальных или вертикальных плоскостей. Бордюры из простейших геометрических фигур (наклонные отрезки прямых, зигзаги, ромбы, косые кресты и др.) со сплошь вышитым фоном и заключенные между двумя горизонтальными (или вертикальными) параллельными прямыми применялись для вышивки головных уборов, наплечных вышивок, шва спереди на эрзянских и мокшанских панарах (обрядовая одежда). Состав орнаментальных мотивов представляет собой геометрические фигуры: ромбы, квадраты, косые и прямые кресты, а так же роговидные и вилообразные элементы и др. (прил.1 рис.3, 4).

Розетка, как вид симметрии, нашла широкое применение в орнаменте мордовской вышивки. При изучении нами выделено четыре типа розеток, используемых в вышивке, которые отличаются применением количества осей и плоскостей симметрии, применяемых к элементарной фигуре. Так при построении розеток могут использоваться только плоскость симметрии или только ось симметрии, или ось и плоскость симметрии, или и множество плоскостей симметрии.

Сравнивая образцы розеток мордовской вышивки с типологией розеток, отметим, что при построении используются ось и плоскость симметрии (прил.1 рис.6).

Розетка является композиционным центром наплечных вышивок женского костюма, в ряде головных уборов. А так же часто используется в вышивке свадебных покрывал мордвы – мокши. В виде полурозеток этот вид симметрии встречается в вышивке практически во всех панарах мордвы – мокши, покаев (свадебная рубаха) мордвы – эрзи. Большинство розеток построено на основе ромба с продленными и загнутыми сторонами, ромба с тремя и более отростками на каждой стороне решетчатого ромба (прил.1 рис. 7).

Большая сложность розеток достигалась расположением в центре основного ромба, какого–либо мотива, повторением его на углах ромба и заполнением пространства между ними другими элементами в виде бордюров или несложных композиций в общую рамку, часто ступенчатую на мокшанских панарах. Розетка чаще всего встречается в бордюрах, которые встречаются на подолах у мокш (прил.1 рис. 8).

В искусстве орнамента нередко используется заполнение плоскости одинаковыми прямолинейными фигурами. В математике такое замощение называется паркетом (в дизайне - сетчатые орнаменты). Сетчатый орнамент, как вид центральной и осевой симметрии, широко распространен в вышивке. Он заполняет всю поверхность и располагается по невидимой сетке с самыми различными формами ячеек: ромба, квадрата, треугольника.

Различают пять систем точек (узлов орнаментальной сетки), которые лежат в основе построения большинства сетчатых орнаментов: квадратную; правильную треугольную, основу которой составляет равносторонний треугольник; прямоугольную, состоящую из прямоугольников с любым соотношением сторон; ромбическую, состоящую из ромбов с любым соотношением диагоналей; параллелограмматические, состоящие из параллелограммов произвольного вида, причем наклон ячейки может быть как левым, так и правым.

Рассматривая данную типологию, стоит отметить, что в мордовской вышивке наиболее распространен ромбический вид сетки и реже – квадратный, орнаментальные мотивы которых располагаются в каждой ячейке на равном расстоянии друг от друга по горизонтали и вертикали. В сетках данных типов применяются и контуры вокруг фигур, но от этого расстояния между фигурами не меняются (прил.1 рис. 9, 10).

Сетчатый орнамент является преобладающим в вышивке головных уборов и применяется в основном для вышивки лобной части, а у некоторых типов головных – в вышивке тыльной стороны и лопасти.

3. Вышивка эрзянского и мокшанского женского костюма.

3.1. Вышивка нательной рубахи и распашной одежды.

Вышивка наплечной одежде всех групп мордвы располагалась вокруг шейного выреза, по плечам, рукавам, подолу и продольным швам основных полотнищ. Количество вышивки, её колорит и состав орнаментальных мотивов зависели от назначения рубахи. Наиболее богатой по количеству вышивки всегда была праздничная обрядовая одежда. Имелись некоторые отличия в расположении и количестве вышивки и у локальных групп мордвы.

Основную декоративную нагрузку на рубахах мордвы – мокши выполняли вышивки наплечные и по подолу. Наплечная вышивка с каждой стороны начиналась у шейного выреза и заканчивалась на границе плеча и рукава розетками: одной или чётным числом небольших розеток, располагавшихся симметрично относительно наплечной вышивки (прил.2 рис.4). Вышивка на подоле спереди, имитирующая разрез, представляет собой бордюр, состоящий из геометрических фигур (восьми – шести конечная розетка, треугольники, квадраты, ромбы и т. п.) (прил.1 рис. 5)

На эрзянских рубахах вышивка располагалась широкой полосой спереди с обеих сторон центрального шва и объединяла в единое целое вышивку по подолу, развитую нагрудную и наплечную. Вышивка на обрядовой одежде (покай) занимала большую площадь, нежели на будничной, иногда закрывала весь холст. Но расположение вышивок на обрядовой и будничной одежде было одинаковым. Основу наплечной вышивки составляла розетка - ромб, обращенная одной из вершин к шейному вырезу (прил.2 рис.4).

Как одну из особенностей орнамента вышивки мордвы следует отметить однотипность состава узоров (орнаментальные полосы, полученные переносом симметричной фигуры вдоль прямой линии в одном и том же направлении или розетки построенные на основе геометрических фигур). Основным элементом орнамента вышивки этого типа является ромб, ромб с диагоналями, ромб с продлёнными, продленными и загнутыми сторонами и другие его варианты.

Нарукавные вышивки представляют собой заполненный горизонтальными рядами бордюров прямоугольный кусок холста, охватывающий рукав почти по всей окружности от кисти до локтя. (прил.1 рис. 1,2)

Отмечая особенности разобранных видов вышивки, следует указать, что орнамент её строго прямолинейный, геометрический.

3.2. Вышивка головного убора.

Все исследователи мордвы отмечали значительное количество видов женских головных уборов. Они отличаются конструкцией, расположением декоративных отделочных материалов и вышивкой. При наличии большого количества различных видов головных уборов по ряду признаков все же удается проследить общие моменты в расположения вышивок.

На эрзянских головных уборах прямоугольник в вышивки занимал всю лобную часть (прил.2 рис.5). Почти на всех эрзянских головных уборах имеется узкая полоса горизонтального бордюра, которая делит всю налобную вышивку на две части. Орнамент на этих головных уборах располагается по косой сетке, очень редко – по прямой. Преобладающий орнаментальный мотив в косой сетки – ромб без каких-либо отклонений от его основных контуров, а в прямой – квадрат (прил.2 рис.1,2).

Очень своеобразными являются вышивки на головных уборах мордвы–мокши. Это или одна большая фигура ромба в центре, или четыре ромба по углам, или деление всей плоскости по вертикали на две половины и т. д. (прил.2 рис.3).

Есть одна особенность в композиции всей вышивки у этих головных уборов, возможно, стоит сказать скорее об особенностях оформления всей лобной части убора. На верхней стороне прямоугольника вышивки есть три узких прямоугольника, расположенных вертикально: один – в центре, два – по бокам. Центральный прямоугольник чаще всего не вышит, но бордюр по его периметру часто в два – четыре раза шире самого прямоугольника. Крайние прямоугольники – полоски почти всегда вышиты, внешнее обрамление совпадает с обрамлением по бокам общего прямоугольника вышивки (прил.2 рис.5).

Традицию вышивки эрзян вплоть до нашего столетия выделяет немногоцветная гамма. Орнамент наплечной вышивки и подола состоит из фигур, редко используемых в мокшанской вышивке, например, восьмиконечных розеток и производных от неё. Несмотря на то, что мокшанская вышивка мелкая и не закрывает значительные участки холста из–за особого построения орнамента, она воспринимается ковровой. Дополнением к цветным фрагментам плотной вышивок были вышивки однотонные на белой глади холста, вычерченные тонким пером с точным математическим расчетом. В небольших фрагментах: полуразетках и треугольниках на подоле рубахи, продольных полосах, вышитых по её стану, - заключалась композиционно сложный орнамент.

Заключение

В данной работе рассмотрена симметрия орнаментов вышивки мордовского национального женского костюма. В результате проведенного исследования мы видим, что:

1. Сложность орнаментальных форм подчинена законам симметрии.
2. Расположение орнаментов на одежде и головных уборах мордовского костюма выстраиваются с применением симметрии: осевой, центральной и зеркальной.
3. Для орнамента мордовской вышивки характерны такие виды симметрии, как бордюр, розетка и сетка.
4. В составе мотива вышивки чаще всего используются орнаментальные полосы, полученные переносом симметричной фигуры вдоль прямой линии в одном и том же направлении, а так же розетка, которая является композиционным центром наплечных вышивок. Сетчатый орнамент является преобладающим в вышивке головных уборов.

На данном этапе задача является полностью решенной. Более детальное исследование данного вопроса с точным определением типов симметрии стоит продолжить в следующем году, с началом изучения основ симметрии на уроках геометрии.

Постановка новых задач:

1. Рассмотреть 17 типов построения плоских орнаментов с точки зрения геометрических преобразований (поворотная и переносная симметрии, симметрия со скользящей осью).
2. Изучить орнаментальные мотивы украшений мордовского костюма.

Литература

1. Вейль Г. Симметрия. Изд.2-е, стереотипное - М.: Едиториал УРСС,2003.-192с.
2. Волошинов А.В. Математика и искусство-2-е изд., дораб. и доп.-М.: Просвещение,200-399с.: ил.
3. Тарасов Л.В. Симметрия в окружающем мире/ Л.В.Тарасов.- М.:ООО Издательство “Мир и Образование”,2005.-256с.: ил.
4. Мартьянов В.Н. Мордовская народная вышивка. – Саранск: Мордовское книжное издательство, 1991 – 120 с.
5. Юшкин Ю.Ф. Мордовия Народное искусство. – Саранск: Мордовское книжное издательство, 1985.

Приложение 1

Рис. 1 Орнаментальные мотивы вышивок на рукавах верхней женской одежды.

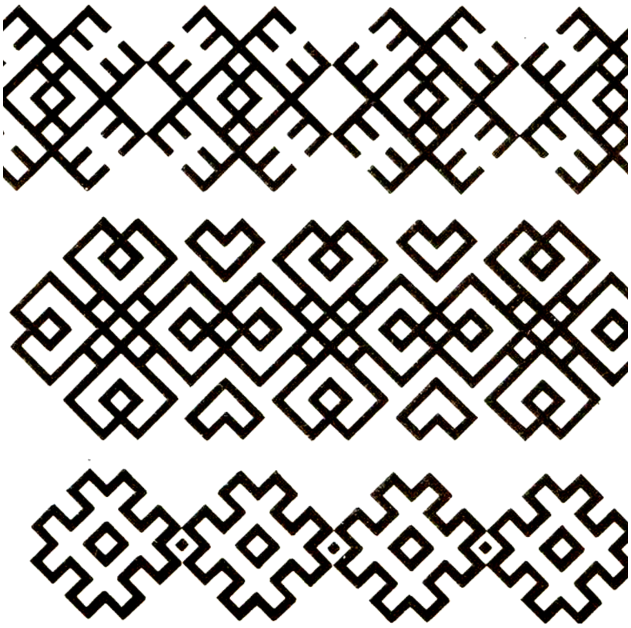


Рис. 2 Орнаментальные мотивы вышивок на рукавах верхней женской одежды

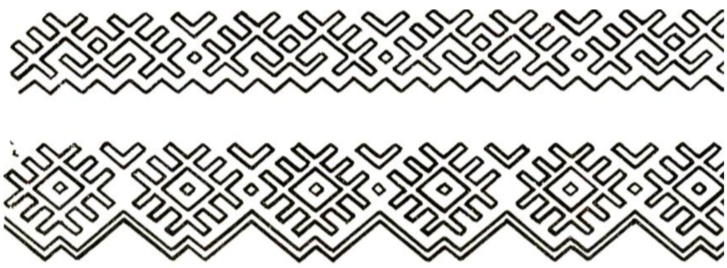


Рис. 3 Орнаментальные мотивы вышивок по подолу женской рубахи

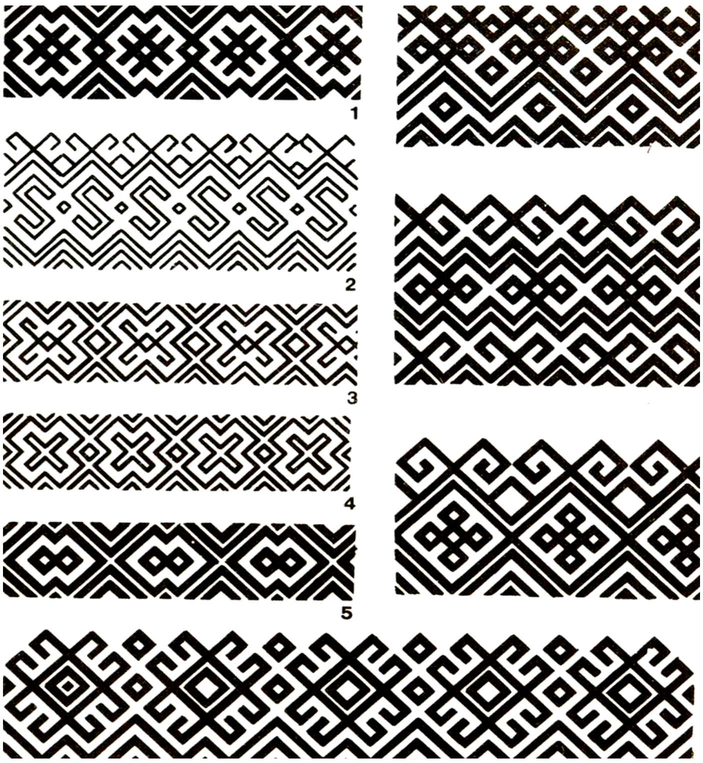


Рис. 4 Орнаментальные мотивы вышивок по подолу женской рубахи

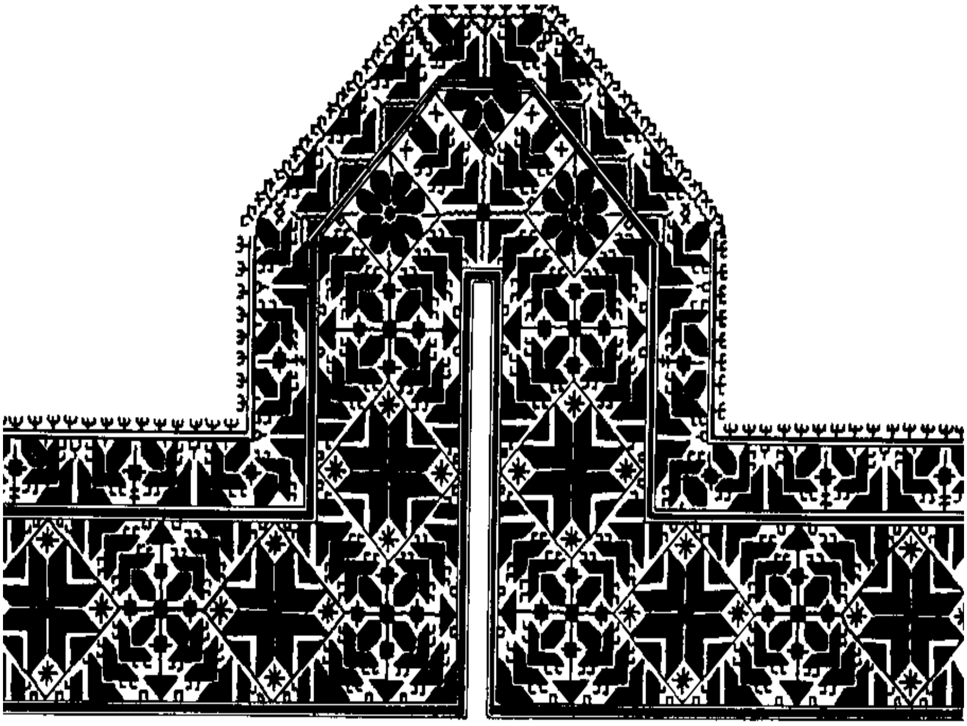


Рис. 5 Композиция вышивки на подоле рубахи мордвы - мокши

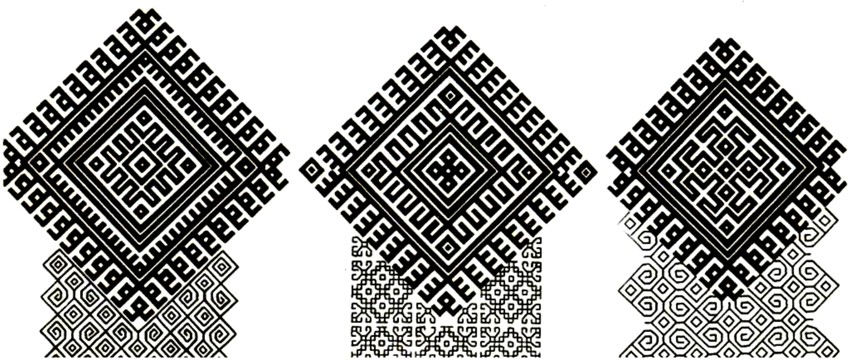


Рис. 6 Композиция и орнаментальные мотивы вышивок на плечах женских рубах мордвы - эрзи

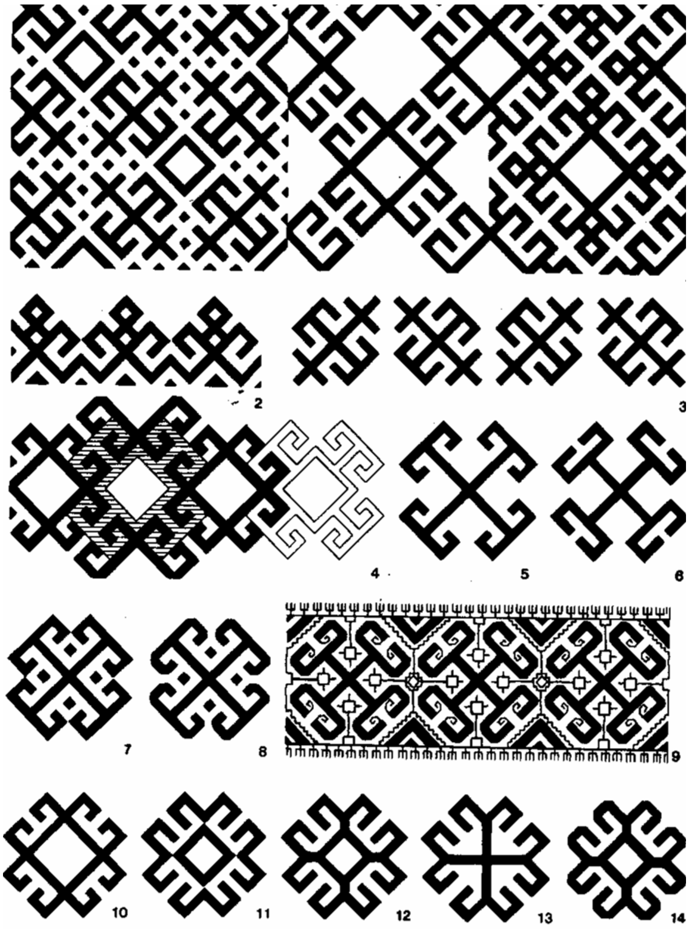


Рис. 7 Схемы образования различных композиций и орнаментальных мотивов из ромбов с продлёнными сторонами

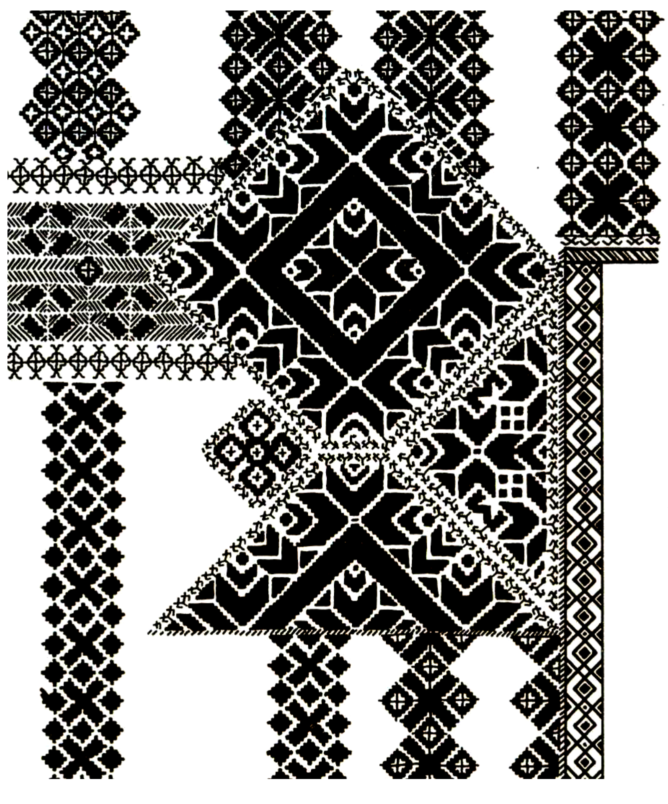


Рис. 8. Композиция наплечной вышивки обрядовой одежды мордвы – эрзи

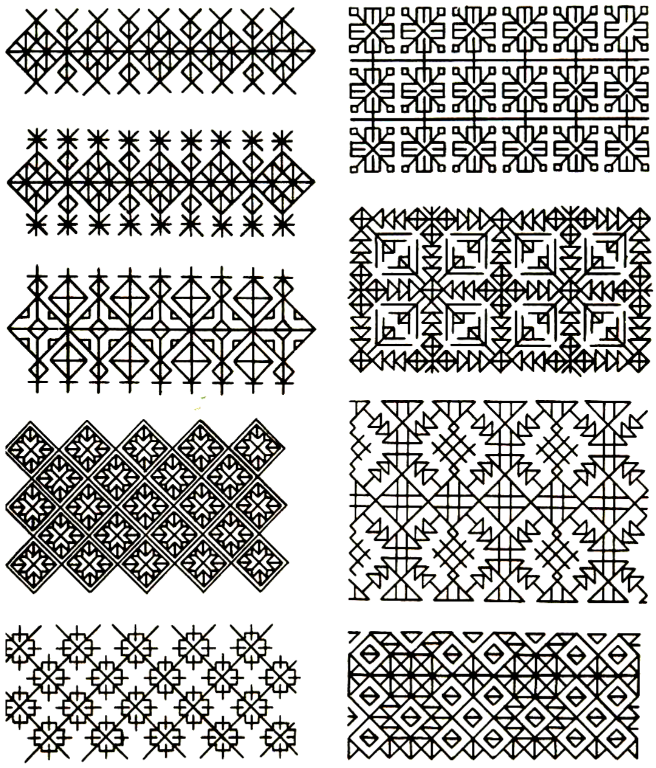


Рис. 9 Варианты простейших сетчатых орнаментов

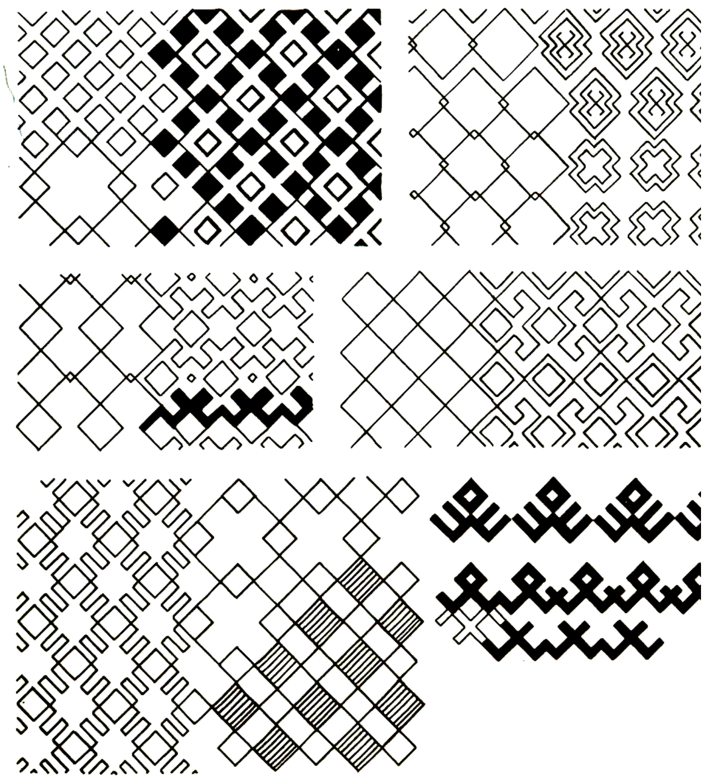


Рис. 10 Схемы построения сетчатых орнаментов в вышивках головного убора

Приложение 2

Рис. 1. Женский головной убор

Рис. 2 Женский головной убор.

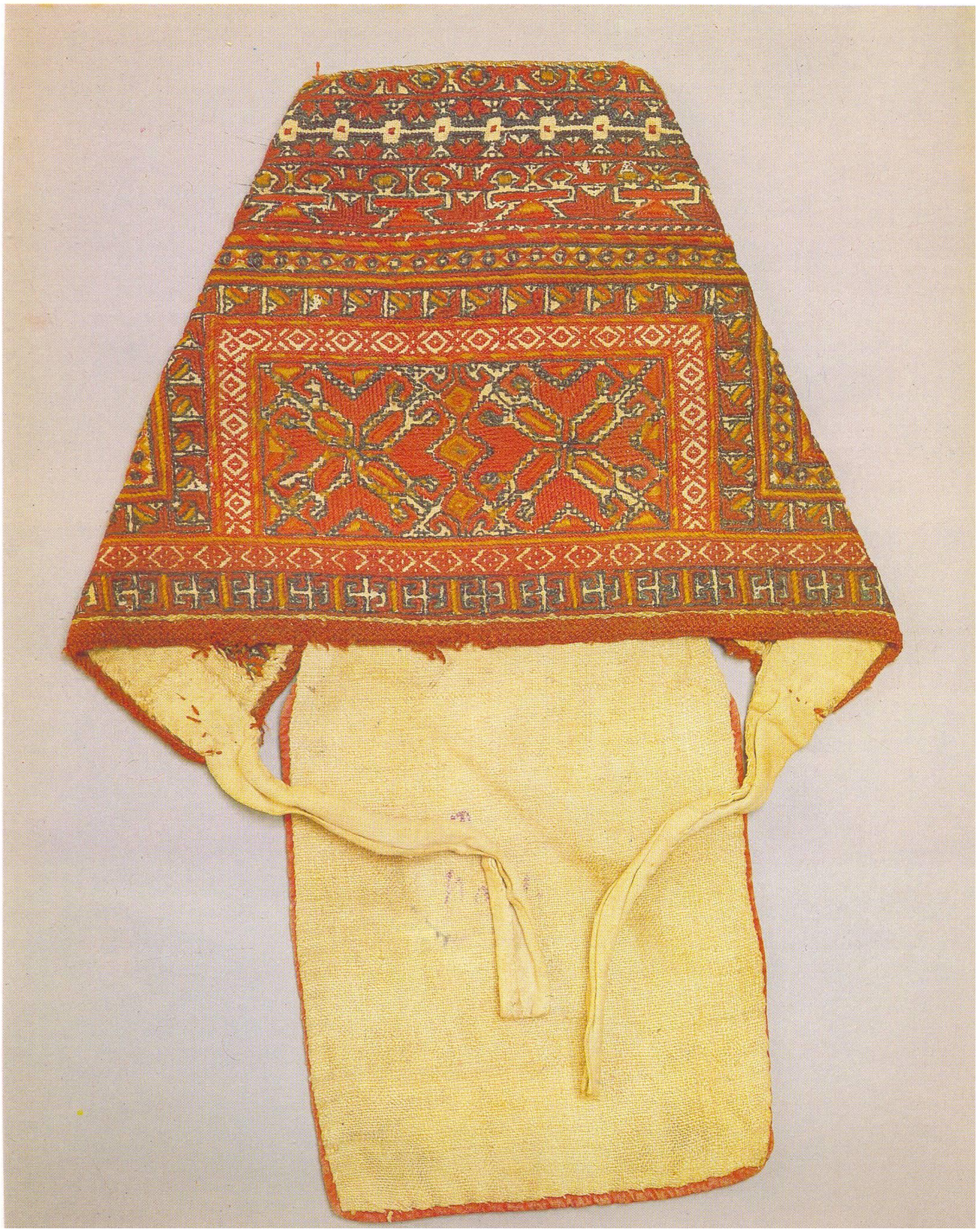


Рис. 3 Женский головной убор.

Рис. 4 Фрагмент вышивки плеча женской рубахи мордвы-эрьзи.

Рис. 5 Фрагмент вышивки налобника женского головного убора мордвы-эрьзи.

Управление образования Администрации г.о. Саранск
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 43» г.о. Саранск

Исследовательская работа
Аликвотные дроби

Выполнила: ученца 6 класса
Богатырева Анна

Руководитель:
учитель математики
МОУ «Лицей № 43»
Лобанова Ольга Евгеньевна

Саранск, 2014

Введение

Учение о дробях считалось самым трудным разделом математики во все времена и у всех народов. Кто знал дроби, тот был в почете. Автор старинной славянской рукописи XVв. писал: «Несть се дивно, что …в целых, но есть похвально, что в долях…».

На математическом кружке учитель нам предложил решить старинную задачу о дележе верблюдов. Решая ее, мы узнали, что среди множества дробей, есть специальные дроби, в числителе которых записана 1. Это аликвотные дроби. В Древнем Египте «настоящими» считали только аликвотные дроби. Поэтому стремились любую дробь представить в виде суммы аликвотных дробей, причем с разными знаменателями. Таким образом, первые дроби, с которыми нас знакомит история – аликвотные.

Меня очень заинтересовали они. Я решила узнать о них как можно больше, например, какие задачи можно решать с помощью аликвотных дробей.

Цель моей работы: изучить аликвотные дроби и их применение в решении задач.

Задачи:

- изучить литературу по теме исследования;
- прорешать задачи на применение аликвотных дробей;
- сделать выводы о методе решения;
- составить авторскую задачу на применение аликвотных дробей;
- получить формулы для подсчета количества разложений дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ в зависимости от вида знаменателя.

Объект исследования: аликвотные дроби.

Предмет исследования: различные разложения правильных дробей на аликвотные дроби.

Методы исследования: математический анализ, компьютерное моделирование, сравнительный анализ.

В своей работе я рассмотрела применение аликвотных дробей в решении нестандартных задач. На основе решенных задач, сделала вывод о методе их решения и придумала свою задачу на данную тему о нашем классе. Изучая аликвотные дроби, я задалась вопросом – а можно ли узнать, сколько всего существует способов разложить дробь вида $\frac{2}{2n+1}$, где n – натуральное число на сумму двух аликвотных дробей? Для получения ответа я составила компьютерную программу и свои расчеты представила в работе.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

2.1. Аликвотные дроби.

Математики древнего Египта «настоящими» считали только дроби, выражающие какую-либо одну долю целого так называемые *единичные* или ***аликвотные*** дроби. Другие дробные числа они записывали не единым символом, а в виде суммы аликвотных дробей. Если, например, в результате измерения получалась дробь $\frac{3}{4}$, то ответ выражался суммой $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Для упрощения практических расчетов составлялись специальные таблицы, содержащие представления некоторых дробных чисел в виде суммы аликвотных дробей. Одна из таких таблиц обнаружена в древней рукописи «Папирус Ахмеса», названной так по имени ученого, рукой которого она была написана.

Вот как в расшифрованном виде выглядят некоторые содержащиеся в таблице записи: $\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$, $\frac{2}{7}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}$, $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$, $\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$.

Чтобы представить какое либо число в виде суммы аликвотных дробей, порой приходится проявлять, незаурядную изобретательность. Скажем, число $\frac{2}{43}$ выражается так: $\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$. Производить арифметические действия над числами, раскладывая их в сумму долей единицы, очень неудобно.

Поэтому в процессе решения задач для разложения аликвотных дробей в виде суммы меньших аликвотных дробей возникла идея систематизировать разложение дробей в виде формулы. Эта формула действует, если требуется разложение аликвотной дроби на две аликвотные дроби.

Формула выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Примеры разложения дробей:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3\cdot(3+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5\cdot(5+1)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{8+1}+\frac{1}{8\cdot(8+1)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}.$$

Преобразуем формулу и получим следующее полезное равенство:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

То есть, аликвотную дробь можно представить разностью двух аликвотных дробей, или разность двух аликвотных дробей, знаменателями которых являются последовательные числа, равна их произведению.

Представим единицу в виде суммы различных аликвотных дробей. Заметим, что представление единицы в виде суммы двух *различных* аликвот невозможно, так как $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Это разложение единственно, поэтому представить единицу в виде суммы различных аликвотных дробей можно начиная с трех слагаемых:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20},$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{42},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{42},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72},$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{42}+\frac{1}{42}\right)+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{2}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72},$$

и так далее.

Вывод 1: для любого натурального $k \geq 3$ единицу можно представить в виде суммы k различных аликвотных дробей.

А можно ли в разложении использовать только нечетные знаменатели?

Например, при $k=9$ получим разложение

$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395}$, где все аликвотные дроби с нечетными знаменателями.

Заметим, что и число слагаемых в разложении тоже нечетно. Задумаемся над вопросом: «Случайно ли это?». Можно ли представить разложение единицы в виде суммы четного количества аликвот с нечетными знаменателями. Вспомним, что для того чтобы сложить две дроби с разными знаменателями, нам нужно их привести к общему знаменателю, то есть умножить числитель и знаменатель дроби на дополнительный множитель. Тогда в знаменателе мы получим произведение четного количества нечетных сомножителей – это нечетное число. А в числителе – сумму из четного количества нечетных слагаемых, которая всегда будет четным числом. Итак, в результате в числителе у нас получится четное число, а в знаменателе – нечетное. А единица получается только когда в числителе и в знаменателе стоят одинаковые числа.

Вывод 2: единицу можно представить в виде суммы нечетного количества различных аликвотных дробей с нечетными знаменателями.

Вывод 3: единицу нельзя представить в виде суммы четного количества различных аликвотных дробей с нечетными знаменателями.

2.2. Применение аликвотных дробей при решении олимпиадных задач.

Изучив материал и сделав выводы, я решила олимпиадные задачи по данной теме.

Задача 1. Вычислить $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}$.

Решение. Воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},$$

…

$$\frac{1}{18\cdot 19}=\frac{1}{18}-\frac{1}{19},$$

$$\frac{1}{19\cdot 20}=\frac{1}{19}-\frac{1}{20}.$$

Подставив, уже разложенные выражения в наш пример, получаем:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{19\cdot 20}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{18}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}=$$

$$=\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{18}\right)+\left(-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}\right)-\frac{1}{20}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{20}=\frac{20}{20}-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}.$$

Задача 2. Вычислить $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$$

Заменим каждое слагаемое разностью аликвотных дробей:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \ldots .$$

Решение.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}.$$ [2]

Задача 3. Старинная задача. Персидский крестьянин завещал трем своим сыновьям 17 верблюдов, причем первый должен был получить $\frac{1}{2}$ часть всех верблюдов, второй – $\frac{1}{3}$ часть, а третий – $\frac{1}{9}$. Братья думали долго, но разделить наследство по завещанию отца так и не смогли. Мимо на верблюде проезжал Ходжа Насреддин. Он предложил присоединить к верблюдам еще и своего и решить таким образом возникшую проблему. И, действительно, братья смогли разделить верблюдов так, как наказал отец, причем Ходжа Насреддин получил своего верблюда обратно. Сколько верблюдов досталось каждому сыну?

Решение. Вместе с верблюдом Насреддина получилось 18 верблюдов.

Выделяем долю старшего сына $18:2=9$(верблюдов), затем второго $18:3=6$(верблюдов), а теперь третьего $18:9=2$(верблюда).

$9+6+2=17$ (верблюдов), а один верблюд Насреддина остался, он и получил его обратно.

Задача решена, но остался ряд нерешенных вопросов.

1. Старший сын должен был получить половину наследства $17:2=8{,}5$ (верблюдов). Понятно, что половина верблюда не сможет ходить на дальние расстояния и перевозить вещи. С помощью Насреддина он получил 9 целых верблюдов. Откуда взялась половина верблюда?

2. Аналогично второй сын должен был получить треть наследства $17:3=\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$ (верблюда). Но ему дали 6 целых верблюдов. Откуда взялась треть верблюда?

3. Третий сын должен был получить девятую часть наследства $17:9=\frac{17}{9}=1\frac{8}{9}$ (верблюда). Ему дали 2 целых верблюдов. Откуда взялась девятая часть верблюда?

Чтобы ответить на все поставленные вопросы сложим завещанные доли

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{17}{18}$$

Теперь стало понятно, отец распорядился только $\frac{17}{18}$ частью наследства, про оставшуюся $\frac{1}{18}$ часть распоряжений не было. Восемнадцатая часть его наследства (17 верблюдов) составит:

$17\cdot\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$ часть одного верблюда. Вот она неучтенная часть!

Сможем ли мы с ее помощью помочь братьям сохранить верблюдов целыми?! То есть сможем ли мы представить:

$\frac{17}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ (вот они аликвотные дроби!).

$$\frac{17}{18}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

Да, с помощью этой неучтенной части старший брат сможет добавить недостающую половину верблюда, второй добавит себе треть, а третий получит девятую часть верблюда.

Похоже, Ходжа Насреддин хорошо знал аликвотные дроби и смог быстро решить эту задачу и помочь братьям в дележе наследства.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

2.1. Авторская задача.

Мне так понравилась эта старинная задача, что я решила сама придумать задачу про наш класс на тему аликвотных дробей.

Задача. Для весеннего художественного смотра наш класс (29человек) планировал подготовить следующую концертную программу: танец, сценка, песня и чтение стихов. Наш классный руководитель предложила всем поучаствовать и распределиться следующим образом: половина класса танцует, пятая часть готовит сценку, шестая часть – поет, а десятая часть класса читает стихи.

Решение. Так как количество учеников нашего класса (29человек) не делилось ни на пополам, ни на пять, ни на шесть, ни на 10 частей, то мы решили добавить нашу учительницу как руководителя концертной программы. Вместе с Ольгой Евгеньевной нас стало 29+1=30 человек. И мы легко смогли поделиться для выступлений

30:2=15(учеников) – участвовали в танце,

30:5=6(учеников) – готовили сценку,

30:6=5(учеников) – пели песню,

30:10=3(ученика) – читали стихи.

Всего в концерте участвовало 15+6+5+3=29(учеников), а наша Ольга Евгеньевна всем руководила.

2.2. Компьютерная пограмма для подсчета количества разложений дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ на аликвотные дроби.

В большинстве случаев для представления некоторой правильной дроби в виде суммы различных аликвотных дробей достаточно уметь раскладывать в такую сумму всякую дробь вида $\frac{2}{n}$. Например, зная разложения $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, $\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$, $\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$, дробь $\frac{7}{25}$ можно легко представить суммой различных аликвотных дробей:

$$\frac{7}{25}=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{25}=\frac{1}{25}+\frac{1}{15}+\frac{1}{75}+\frac{2}{15}+\frac{2}{75}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{25}+\frac{1}{30}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}+\frac{1}{150}.$$

В папирусе Ахмеса представлена таблица, в которой все дроби вида $\frac{2}{n}$ для нечетных n от 3 до 101 представлены суммами аликвотных дробей. Эта таблица помогала производить сложные арифметические выкладки согласно принятым египетским канонам. Ее заучивали наизусть. Но разложение дроби на сумму аликвотных дробей не единственно. Египтяне стремились использовать разложения с небольшим количеством слагаемых и по возможности с наименьшими знаменателями. Какими именно способами они при этом пользовались, мы не знаем.

В настоящее время математиками доказано, что каждую положительную правильную дробь можно выразить суммой различных аликвотных дробей. Для решения этой задачи предложено несколько практических алгоритмов. Но эти алгоритмы дают иногда различные разложения. В связи с этим я задалась вопросом – а можно ли узнать, сколько всего существует способов разложить дробь вида $\frac{2}{2n+1}$, где n – натуральное число на сумму двух аликвотных дробей?

Всегда существует тривиальное разложение $\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}$. Например, $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Формула разложения дроби вида $\frac{2}{n}$ с нечетным знаменателем выглядит следующим образом $\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(n+1)}$. Тогда по этой формуле $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Это второе разложение дроби $\frac{2}{3}$, где аликвоты различные. Для того, чтобы найти разложения всех дробей вида $\frac{2}{2n+1}$ для n от 1 до 500 (то есть дроби от $\frac{2}{3}$ до $\frac{2}{1001}$ с нечетными знаменателями) я составила компьютерную программу. Эта программа находила все разложения для каждой дроби и выводила их на экран. В приложении 1 даны несколько таких разложений (всего разложения занимают 136 страниц). При этом я заметила, что количество разложений 2, 5, 8, 14 встречаются чаще остальных. Затем я составила таблицу (приложение 2), где сопоставила количество разложений и количество простых множителей в разложении знаменателя $2n+1$. Заметила, что:

– если знаменатель состоит из единственного простого множителя, то существует два разложения дроби $\frac{2}{2n+1}$, одно из которых – тривиальное;
– если знаменатель состоит из нескольких простых множителей, то число разложений дроби $\frac{2}{2n+1}$ зависит от того одинаковые простые множители или различные;
– число разложений аликвотной дроби тем больше, чем больше различных простых множителей в знаменателе дроби.

Все полученные случаи я представила в таблице:

количество множителей в разложении знаменателя	количество повторяющихся множителей	количество различных множителей	число разложений дроби
1	0	1	2
2	2	0	3
	0	2	5
3	3	0	4
	2	1	8
	0	3	14
4	4	0	5
	3	1	11
	2по 2	0	13
	2	2	23
	0	4	41

5	5	0	6
	4	1	14
	3 и 2		18
	3	2	32
	0	5	122
6	6	0	7
	5	1	17
	2 по 3	0	25
	4	2	41
	3	3	25
…	…	…	…

Потом я попыталась найти закономерности в количестве разложений дроби $\frac{2}{2n+1}$ в зависимости от вида разложения ее знаменателя на простые множители.

Если простые множители в знаменателе все одинаковые, то получаем последовательность 1 множитель – 2 разложения,

2 множителя – 3 разложения,

3 множителя – 4 разложения,

4 множителя – 5 разложений,

5 множителей – 6 разложений,

6 множителей – 7 разложений…(серые клетки) и т.д.

Вывод: для дробей с k одинаковыми множителями в знаменателе существует *(k+1)* разложение на аликвотные дроби.

Пример. Дробь $\frac{2}{13}$ имеет один простой множитель в знаменателе, раскладывается двумя способами, $\frac{2}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}$ и $\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$

Рассмотрим случай, когда в знаменателе дроби $\frac{2}{2n+1}$ имеется k повторяющихся и один отличающийся от остальных простой множитель. Получим последовательность 8, 11, 14, 17, … Каждое следующее значение можно получить по формуле *3k+2*.

Пример. Дробь $\frac{2}{45}=\frac{2}{3\cdot3\cdot5}$, у которой в знаменателе тройка повторяется два раза, а пятерка – один имеет 8 разложений на аликвотные дроби.

Аналогично, выпишем количество разложений для k повторяющихся и двух отличающихся простых множителей: 23, 32, 41, … Выявляю закономерность каждое следующее получается по формуле $9k+5$.

Пример. Дробь $\frac{2}{495}=\frac{2}{3\cdot3\cdot5\cdot11}$, у которой в знаменателе тройка повторяется два раза, а пятерка и одиннадцать – один имеет 23 разложения на аликвотные дроби.

Количество повторяющихся и отличающихся простых множителей в знаменателе равны между собой в следующих случаях: 5, 13, 25, 41… Чтобы выявить закономерность перепишем (1+4), (4+9), (9+16), (16+25), … Теперь становится понятна формула $k^2+(k+1)^2$.

Пример. Дробь $\frac{2}{441}=\frac{2}{3\cdot3\cdot7\cdot7}$, у которой в знаменателе тройка и семерка повторяются по два раза, 13 разложений на аликвотные дроби.

Вывод 1: количество вариантов разложения дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ на сумму двух аликвот однозначно определяется видом разложения ее знаменателя на простые множители.

Вывод 2: в работе выведены формулы для подсчета количества разложений дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ в зависимости от вида знаменателя.

Заключение.

- Таким образом, при изучении данной темы, я узнала, что первыми дробями, которыми оперировали люди, были аликвотные дроби.
- Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Разложение дробей на две аликвотные дроби систематизировали в виде формулы, преобразовав которую, легко решать олимпиадные задачи по математике.
- На основе решенных задач, сделала вывод о методе их решения и придумала свою задачу на данную тему о нашем классе.
  - В работе я представила полученные формулы для подсчета количества разложений дроби вида $\frac{2}{2n+1}$ в зависимости от вида знаменателя.

Список литературы

1. Баженов И.И., Порошкин А.Г. и др. Задачи для школьных математических кружков. Сыктывкар, 1994.
2. Гаврилова Т. Д. «Занимательная математика». 5-11класс. Волгоград: Учитель, 2008.
3. Египетские дроби. Квант 2006 год №4.
4. Кольман Э. История математики в древности. М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1961.
5. Левитас Г. Г. Нестандартные задачи по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007.
6. Петерсон Л. Г. Математика. 5класс. – М.: Ювента, 2009.
7. Рыбников К.А. История математики. Т.1. - М.: Изд-во МГУ, 1960. –
8. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе. 5-11класс. – М.: Айрис-пресс, 2005.
9. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста. М.: Педагогика,1989.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

n=1; дробь: 2/(2*1+1)

3 = 3 (1)

1: 1/3 + 1/3

2: 1/6 + 1/2

всего: 2

n=2; дробь: 2/(2*2+1)

5 = 5 (1)

1: 1/5 + 1/5

2: 1/15 + 1/3

всего: 2

n=3; дробь: 2/(2*3+1)

7 = 7 (1)

1: 1/7 + 1/7

2: 1/28 + 1/4

всего: 2

n=4; дробь: 2/(2*4+1)

9 = 3 * 3 (2)

1: 1/9 + 1/9

2: 1/18 + 1/6

3: 1/45 + 1/5

всего: 3

n=5; дробь: 2/(2*5+1)

11 = 11 (1)

1: 1/11 + 1/11

2: 1/66 + 1/6

всего: 2

n=6; дробь: 2/(2*6+1)

13 = 13 (1)

1: 1/13 + 1/13

2: 1/91 + 1/7

всего: 2

n=7; дробь: 2/(2*7+1)

15 = 3 * 5 (2)

1: 1/15 + 1/15

2: 1/20 + 1/12

3: 1/30 + 1/10

4: 1/45 + 1/9

5: 1/120 + 1/8

всего: 5

n=8; дробь: 2/(2*8+1)

17 = 17 (1)

1: 1/17 + 1/17

2: 1/153 + 1/9

всего: 2

n=9; дробь: 2/(2*9+1)

19 = 19 (1)

1: 1/19 + 1/19

2: 1/190 + 1/10

всего: 2

n=10; дробь: 2/(2*10+1)

21 = 3 * 7 (2)

1: 1/21 + 1/21

2: 1/35 + 1/15

3: 1/42 + 1/14

4: 1/84 + 1/12

5: 1/231 + 1/11

всего: 5

n=11; дробь: 2/(2*11+1)

23 = 23 (1)

1: 1/23 + 1/23

2: 1/276 + 1/12

всего: 2

n=12; дробь: 2/(2*12+1)

25 = 5 * 5 (2)

1: 1/25 + 1/25

2: 1/75 + 1/15

3: 1/325 + 1/13

всего: 3

n=13; дробь: 2/(2*13+1)

27 = 3 * 3 * 3 (3)

1: 1/27 + 1/27

2: 1/54 + 1/18

3: 1/135 + 1/15

4: 1/378 + 1/14

всего: 4

n=14; дробь: 2/(2*14+1)

29 = 29 (1)

1: 1/29 + 1/29

2: 1/435 + 1/15

всего: 2

n=15; дробь: 2/(2*15+1)

31 = 31 (1)

1: 1/31 + 1/31

2: 1/496 + 1/16

всего: 2

n=16; дробь: 2/(2*16+1)

33 = 3 * 11 (2)

1: 1/33 + 1/33

2: 1/66 + 1/22

3: 1/77 + 1/21

4: 1/198 + 1/18

5: 1/561 + 1/17

всего: 5

n=17; дробь: 2/(2*17+1)

35 = 5 * 7 (2)

1: 1/35 + 1/35

2: 1/42 + 1/30

3: 1/105 + 1/21

4: 1/140 + 1/20

5: 1/630 + 1/18

всего: 5

n=18; дробь: 2/(2*18+1)

37 = 37 (1)

1: 1/37 + 1/37

2: 1/703 + 1/19

всего: 2

n=19; дробь: 2/(2*19+1)

39 = 3 * 13 (2)

1: 1/39 + 1/39

2: 1/78 + 1/26

3: 1/104 + 1/24

4: 1/273 + 1/21

5: 1/780 + 1/20

всего: 5

n=20; дробь: 2/(2*20+1)

41 = 41 (1)

1: 1/41 + 1/41

2: 1/861 + 1/21

всего: 2

n=21; дробь: 2/(2*21+1)

43 = 43 (1)

1: 1/43 + 1/43

2: 1/946 + 1/22

всего: 2

n=22; дробь: 2/(2*22+1)

45 = 3 * 3 * 5 (3)

1: 1/45 + 1/45

2: 1/60 + 1/36

3: 1/63 + 1/35

4: 1/90 + 1/30

5: 1/135 + 1/27

6: 1/225 + 1/25

7: 1/360 + 1/24

8: 1/1035 + 1/23

всего: 8

n=23; дробь: 2/(2*23+1)

47 = 47 (1)

1: 1/47 + 1/47

2: 1/1128 + 1/24

всего: 2

n=24; дробь: 2/(2*24+1)

49 = 7 * 7 (2)

1: 1/49 + 1/49

2: 1/196 + 1/28

3: 1/1225 + 1/25

всего: 3

n=25; дробь: 2/(2*25+1)

51 = 3 * 17 (2)

1: 1/51 + 1/51

2: 1/102 + 1/34

3: 1/170 + 1/30

4: 1/459 + 1/27

5: 1/1326 + 1/26

всего: 5

n=26; дробь: 2/(2*26+1)

53 = 53 (1)

1: 1/53 + 1/53

2: 1/1431 + 1/27

всего: 2

n=27; дробь: 2/(2*27+1)

55 = 5 * 11 (2)

1: 1/55 + 1/55

2: 1/88 + 1/40

3: 1/165 + 1/33

4: 1/330 + 1/30

5: 1/1540 + 1/28

всего: 5

n=28; дробь: 2/(2*28+1)

57 = 3 * 19 (2)

1: 1/57 + 1/57

2: 1/114 + 1/38

3: 1/209 + 1/33

4: 1/570 + 1/30

5: 1/1653 + 1/29

всего: 5

n=29; дробь: 2/(2*29+1)

59 = 59 (1)

1: 1/59 + 1/59

2: 1/1770 + 1/30

всего: 2

n=30; дробь: 2/(2*30+1)

61 = 61 (1)

1: 1/61 + 1/61

2: 1/1891 + 1/31

всего: 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

n	2*n+1	разложение 2*n+1 на простые множители	количество простых множителей в разложении 2*n+1	количество разложений на 2 аликв. дроби
1	3	3	1	2
2	5	5	1	2
3	7	7	1	2
4	9	3 * 3	2	3
5	11	11	1	2
6	13	13	1	2
7	15	3 * 5	2	5
8	17	17	1	2
9	19	19	1	2
10	21	3 * 7	2	5
11	23	23	1	2
12	25	5 * 5	2	3
13	27	3 * 3 * 3	3	4
14	29	29	1	2
15	31	31	1	2
16	33	3 * 11	2	5
17	35	5 * 7	2	5
18	37	37	1	2
19	39	3 * 13	2	5
20	41	41	1	2
21	43	43	1	2
22	45	3 * 3 * 5	3	8
23	47	47	1	2
24	49	7 * 7	2	3
25	51	3 * 17	2	5
26	53	53	1	2
27	55	5 * 11	2	5
28	57	3 * 19	2	5
29	59	59	1	2
30	61	61	1	2
31	63	3 * 3 * 7	3	8
32	65	5 * 13	2	5
33	67	67	1	2
34	69	3 * 23	2	5
35	71	71	1	2
36	73	73	1	2
37	75	3 * 5 * 5	3	8
38	77	7 * 11	2	5
39	79	79	1	2
40	81	3 * 3 * 3 * 3	4	5
41	83	83	1	2
42	85	5 * 17	2	5
43	87	3 * 29	2	5
44	89	89	1	2
45	91	7 * 13	2	5
46	93	3 * 31	2	5
47	95	5 * 19	2	5
48	97	97	1	2
49	99	3 * 3 * 11	3	8
50	101	101	1	2

51	103	103	1	2
52	105	3 * 5 * 7	3	14
53	107	107	1	2
54	109	109	1	2
55	111	3 * 37	2	5
56	113	113	1	2
57	115	5 * 23	2	5
58	117	3 * 3 * 13	3	8
59	119	7 * 17	2	5
60	121	11 * 11	2	3
61	123	3 * 41	2	5
62	125	5 * 5 * 5	3	4
63	127	127	1	2
64	129	3 * 43	2	5
65	131	131	1	2
66	133	7 * 19	2	5
67	135	3 * 3 * 3 * 5	4	11
68	137	137	1	2
69	139	139	1	2
70	141	3 * 47	2	5
71	143	11 * 13	2	5
72	145	5 * 29	2	5
73	147	3 * 7 * 7	3	8
74	149	149	1	2
75	151	151	1	2
76	153	3 * 3 * 17	3	8
77	155	5 * 31	2	5
78	157	157	1	2
79	159	3 * 53	2	5
80	161	7 * 23	2	5
81	163	163	1	2
82	165	3 * 5 * 11	3	14
83	167	167	1	2
84	169	13 * 13	2	3
85	171	3 * 3 * 19	3	8
86	173	173	1	2
87	175	5 * 5 * 7	3	8
88	177	3 * 59	2	5
89	179	179	1	2
90	181	181	1	2
91	183	3 * 61	2	5
92	185	5 * 37	2	5
93	187	11 * 17	2	5
94	189	3 * 3 * 3 * 7	4	11
95	191	191	1	2
96	193	193	1	2
97	195	3 * 5 * 13	3	14
98	197	197	1	2
99	199	199	1	2
100	201	3 * 67	2	5
101	203	7 * 29	2	5
102	205	5 * 41	2	5
103	207	3 * 3 * 23	3	8
104	209	11 * 19	2	5
105	211	211	1	2
106	213	3 * 71	2	5

107	215	5 * 43	2	5
108	217	7 * 31	2	5
109	219	3 * 73	2	5
110	221	13 * 17	2	5
111	223	223	1	2
112	225	3 * 3 * 5 * 5	4	13
113	227	227	1	2
114	229	229	1	2
115	231	3 * 7 * 11	3	14
116	233	233	1	2
117	235	5 * 47	2	5
118	237	3 * 79	2	5
119	239	239	1	2
120	241	241	1	2
121	243	3 * 3 * 3 * 3 * 3	5	6
122	245	5 * 7 * 7	3	8
123	247	13 * 19	2	5
124	249	3 * 83	2	5
125	251	251	1	2
126	253	11 * 23	2	5
127	255	3 * 5 * 17	3	14
128	257	257	1	2
129	259	7 * 37	2	5
130	261	3 * 3 * 29	3	8
131	263	263	1	2
132	265	5 * 53	2	5
133	267	3 * 89	2	5
134	269	269	1	2
135	271	271	1	2
136	273	3 * 7 * 13	3	14
137	275	5 * 5 * 11	3	8
138	277	277	1	2
139	279	3 * 3 * 31	3	8
140	281	281	1	2
141	283	283	1	2
142	285	3 * 5 * 19	3	14
143	287	7 * 41	2	5
144	289	17 * 17	2	3
145	291	3 * 97	2	5
146	293	293	1	2
147	295	5 * 59	2	5
148	297	3 * 3 * 3 * 11	4	11
149	299	13 * 23	2	5
150	301	7 * 43	2	5
151	303	3 * 101	2	5
152	305	5 * 61	2	5
153	307	307	1	2
154	309	3 * 103	2	5
155	311	311	1	2
156	313	313	1	2
157	315	3 * 3 * 5 * 7	4	23
158	317	317	1	2
159	319	11 * 29	2	5
160	321	3 * 107	2	5
161	323	17 * 19	2	5
162	325	5 * 5 * 13	3	8

163	327	3 * 109	2	5
164	329	7 * 47	2	5
165	331	331	1	2
166	333	3 * 3 * 37	3	8
167	335	5 * 67	2	5
168	337	337	1	2
169	339	3 * 113	2	5
170	341	11 * 31	2	5
171	343	7 * 7 * 7	3	4
172	345	3 * 5 * 23	3	14
173	347	347	1	2
174	349	349	1	2
175	351	3 * 3 * 3 * 13	4	11
176	353	353	1	2
177	355	5 * 71	2	5
178	357	3 * 7 * 17	3	14
179	359	359	1	2
180	361	19 * 19	2	3
181	363	3 * 11 * 11	3	8
182	365	5 * 73	2	5
183	367	367	1	2
184	369	3 * 3 * 41	3	8
185	371	7 * 53	2	5
186	373	373	1	2
187	375	3 * 5 * 5 * 5	4	11
188	377	13 * 29	2	5
189	379	379	1	2
190	381	3 * 127	2	5
191	383	383	1	2
192	385	5 * 7 * 11	3	14
193	387	3 * 3 * 43	3	8
194	389	389	1	2
195	391	17 * 23	2	5
196	393	3 * 131	2	5
197	395	5 * 79	2	5
198	397	397	1	2
199	399	3 * 7 * 19	3	14
200	401	401	1	2
201	403	13 * 31	2	5
202	405	3 * 3 * 3 * 3 * 5	5	14
203	407	11 * 37	2	5
204	409	409	1	2
205	411	3 * 137	2	5
206	413	7 * 59	2	5
207	415	5 * 83	2	5
208	417	3 * 139	2	5
209	419	419	1	2
210	421	421	1	2
211	423	3 * 3 * 47	3	8
212	425	5 * 5 * 17	3	8
213	427	7 * 61	2	5
214	429	3 * 11 * 13	3	14
215	431	431	1	2
216	433	433	1	2
217	435	3 * 5 * 29	3	14
218	437	19 * 23	2	5

219	439	439	1	2
220	441	3 * 3 * 7 * 7	4	13
221	443	443	1	2
222	445	5 * 89	2	5
223	447	3 * 149	2	5
224	449	449	1	2
225	451	11 * 41	2	5
226	453	3 * 151	2	5
227	455	5 * 7 * 13	3	14
228	457	457	1	2
229	459	3 * 3 * 3 * 17	4	11
230	461	461	1	2
231	463	463	1	2
232	465	3 * 5 * 31	3	14
233	467	467	1	2
234	469	7 * 67	2	5
235	471	3 * 157	2	5
236	473	11 * 43	2	5
237	475	5 * 5 * 19	3	8
238	477	3 * 3 * 53	3	8
239	479	479	1	2
240	481	13 * 37	2	5
241	483	3 * 7 * 23	3	14
242	485	5 * 97	2	5
243	487	487	1	2
244	489	3 * 163	2	5
245	491	491	1	2
246	493	17 * 29	2	5
247	495	3 * 3 * 5 * 11	4	23
248	497	7 * 71	2	5
249	499	499	1	2
250	501	3 * 167	2	5
251	503	503	1	2
252	505	5 * 101	2	5
253	507	3 * 13 * 13	3	8
254	509	509	1	2
255	511	7 * 73	2	5
256	513	3 * 3 * 3 * 19	4	11
257	515	5 * 103	2	5
258	517	11 * 47	2	5
259	519	3 * 173	2	5
260	521	521	1	2
261	523	523	1	2
262	525	3 * 5 * 5 * 7	4	23
263	527	17 * 31	2	5
264	529	23 * 23	2	3
265	531	3 * 3 * 59	3	8
266	533	13 * 41	2	5
267	535	5 * 107	2	5
268	537	3 * 179	2	5
269	539	7 * 7 * 11	3	8
270	541	541	1	2
271	543	3 * 181	2	5
272	545	5 * 109	2	5
273	547	547	1	2
274	549	3 * 3 * 61	3	8

275	551	19 * 29	2	5
276	553	7 * 79	2	5
277	555	3 * 5 * 37	3	14
278	557	557	1	2
279	559	13 * 43	2	5
280	561	3 * 11 * 17	3	14
281	563	563	1	2
282	565	5 * 113	2	5
283	567	3 * 3 * 3 * 3 * 7	5	14
284	569	569	1	2
285	571	571	1	2
286	573	3 * 191	2	5
287	575	5 * 5 * 23	3	8
288	577	577	1	2
289	579	3 * 193	2	5
290	581	7 * 83	2	5
291	583	11 * 53	2	5
292	585	3 * 3 * 5 * 13	4	23
293	587	587	1	2
294	589	19 * 31	2	5
295	591	3 * 197	2	5
296	593	593	1	2
297	595	5 * 7 * 17	3	14
298	597	3 * 199	2	5
299	599	599	1	2
300	601	601	1	2
301	603	3 * 3 * 67	3	8
302	605	5 * 11 * 11	3	8
303	607	607	1	2
304	609	3 * 7 * 29	3	14
305	611	13 * 47	2	5
306	613	613	1	2
307	615	3 * 5 * 41	3	14
308	617	617	1	2
309	619	619	1	2
310	621	3 * 3 * 3 * 23	4	11
311	623	7 * 89	2	5
312	625	5 * 5 * 5 * 5	4	5
313	627	3 * 11 * 19	3	14
314	629	17 * 37	2	5
315	631	631	1	2
316	633	3 * 211	2	5
317	635	5 * 127	2	5
318	637	7 * 7 * 13	3	8
319	639	3 * 3 * 71	3	8
320	641	641	1	2
321	643	643	1	2
322	645	3 * 5 * 43	3	14
323	647	647	1	2
324	649	11 * 59	2	5
325	651	3 * 7 * 31	3	14
326	653	653	1	2
327	655	5 * 131	2	5
328	657	3 * 3 * 73	3	8
329	659	659	1	2
330	661	661	1	2

331	663	3 * 13 * 17	3	14
332	665	5 * 7 * 19	3	14
333	667	23 * 29	2	5
334	669	3 * 223	2	5
335	671	11 * 61	2	5
336	673	673	1	2
337	675	3 * 3 * 3 * 5 * 5	5	18
338	677	677	1	2
339	679	7 * 97	2	5
340	681	3 * 227	2	5
341	683	683	1	2
342	685	5 * 137	2	5
343	687	3 * 229	2	5
344	689	13 * 53	2	5
345	691	691	1	2
346	693	3 * 3 * 7 * 11	4	23
347	695	5 * 139	2	5
348	697	17 * 41	2	5
349	699	3 * 233	2	5
350	701	701	1	2
351	703	19 * 37	2	5
352	705	3 * 5 * 47	3	14
353	707	7 * 101	2	5
354	709	709	1	2
355	711	3 * 3 * 79	3	8
356	713	23 * 31	2	5
357	715	5 * 11 * 13	3	14
358	717	3 * 239	2	5
359	719	719	1	2
360	721	7 * 103	2	5
361	723	3 * 241	2	5
362	725	5 * 5 * 29	3	8
363	727	727	1	2
364	729	3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3	6	7
365	731	17 * 43	2	5
366	733	733	1	2
367	735	3 * 5 * 7 * 7	4	23
368	737	11 * 67	2	5
369	739	739	1	2
370	741	3 * 13 * 19	3	14
371	743	743	1	2
372	745	5 * 149	2	5
373	747	3 * 3 * 83	3	8
374	749	7 * 107	2	5
375	751	751	1	2
376	753	3 * 251	2	5
377	755	5 * 151	2	5
378	757	757	1	2
379	759	3 * 11 * 23	3	14
380	761	761	1	2
381	763	7 * 109	2	5
382	765	3 * 3 * 5 * 17	4	23
383	767	13 * 59	2	5
384	769	769	1	2
385	771	3 * 257	2	5
386	773	773	1	2

387	775	5 * 5 * 31	3	8
388	777	3 * 7 * 37	3	14
389	779	19 * 41	2	5
390	781	11 * 71	2	5
391	783	3 * 3 * 3 * 29	4	11
392	785	5 * 157	2	5
393	787	787	1	2
394	789	3 * 263	2	5
395	791	7 * 113	2	5
396	793	13 * 61	2	5
397	795	3 * 5 * 53	3	14
398	797	797	1	2
399	799	17 * 47	2	5
400	801	3 * 3 * 89	3	8
401	803	11 * 73	2	5
402	805	5 * 7 * 23	3	14
403	807	3 * 269	2	5
404	809	809	1	2
405	811	811	1	2
406	813	3 * 271	2	5
407	815	5 * 163	2	5
408	817	19 * 43	2	5
409	819	3 * 3 * 7 * 13	4	23
410	821	821	1	2
411	823	823	1	2
412	825	3 * 5 * 5 * 11	4	23
413	827	827	1	2
414	829	829	1	2
415	831	3 * 277	2	5
416	833	7 * 7 * 17	3	8
417	835	5 * 167	2	5
418	837	3 * 3 * 3 * 31	4	11
419	839	839	1	2
420	841	29 * 29	2	3
421	843	3 * 281	2	5
422	845	5 * 13 * 13	3	8
423	847	7 * 11 * 11	3	8
424	849	3 * 283	2	5
425	851	23 * 37	2	5
426	853	853	1	2
427	855	3 * 3 * 5 * 19	4	23
428	857	857	1	2
429	859	859	1	2
430	861	3 * 7 * 41	3	14
431	863	863	1	2
432	865	5 * 173	2	5
433	867	3 * 17 * 17	3	8
434	869	11 * 79	2	5
435	871	13 * 67	2	5
436	873	3 * 3 * 97	3	8
437	875	5 * 5 * 5 * 7	4	11
438	877	877	1	2
439	879	3 * 293	2	5
440	881	881	1	2
441	883	883	1	2
442	885	3 * 5 * 59	3	14

443	887	887	1	2
444	889	7 * 127	2	5
445	891	3 * 3 * 3 * 3 * 11	5	14
446	893	19 * 47	2	5
447	895	5 * 179	2	5
448	897	3 * 13 * 23	3	14
449	899	29 * 31	2	5
450	901	17 * 53	2	5
451	903	3 * 7 * 43	3	14
452	905	5 * 181	2	5
453	907	907	1	2
454	909	3 * 3 * 101	3	8
455	911	911	1	2
456	913	11 * 83	2	5
457	915	3 * 5 * 61	3	14
458	917	7 * 131	2	5
459	919	919	1	2
460	921	3 * 307	2	5
461	923	13 * 71	2	5
462	925	5 * 5 * 37	3	8
463	927	3 * 3 * 103	3	8
464	929	929	1	2
465	931	7 * 7 * 19	3	8
466	933	3 * 311	2	5
467	935	5 * 11 * 17	3	14
468	937	937	1	2
469	939	3 * 313	2	5
470	941	941	1	2
471	943	23 * 41	2	5
472	945	3 * 3 * 3 * 5 * 7	5	32
473	947	947	1	2
474	949	13 * 73	2	5
475	951	3 * 317	2	5
476	953	953	1	2
477	955	5 * 191	2	5
478	957	3 * 11 * 29	3	14
479	959	7 * 137	2	5
480	961	31 * 31	2	3
481	963	3 * 3 * 107	3	8
482	965	5 * 193	2	5
483	967	967	1	2
484	969	3 * 17 * 19	3	14
485	971	971	1	2
486	973	7 * 139	2	5
487	975	3 * 5 * 5 * 13	4	23
488	977	977	1	2
489	979	11 * 89	2	5
490	981	3 * 3 * 109	3	8
491	983	983	1	2
492	985	5 * 197	2	5
493	987	3 * 7 * 47	3	14
494	989	23 * 43	2	5
495	991	991	1	2
496	993	3 * 331	2	5
497	995	5 * 199	2	5
498	997	997	1	2

499	999	3 * 3 * 3 * 37	4	11
500	1001	7 * 11 * 13	3	14

Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей №43» г.о. Саранск

Номинация «Математика»

Математика сквозь призму истории

Выполнил: Горшенев Никита,
ученик 6 класса

Руководитель: Лобанова О.Е., учитель
математики

Саранск, 2014

Введение

Известный историк и методист-математик И.Я. Депман справедливо утверждал: «Исторические сведения о математике своей Родины и ее достижениях естественно развивают патриотические чувства и любовь к своей стране, к своему народу».

Как известно, история содержит в себе очень много различных исторических событий, которые нужно знать и помнить. Я думаю, чтобы лучше ориентироваться во всех исторических событиях, чтобы лучше запомнить исторические даты и разнообразные цифровые данные, необходимо очень хорошо знать основы такой науки, как математика. Ведь не случайно говорят, что «математика ум в порядок приводит», «математика – царица всех наук». Сделать можно это, конечно же, через решение математических задач, содержание которых включает в себя разнообразные исторические сведения.

Цель работы: изучить разнообразие школьных математических задач, которые решали школьники на различных этапах развития нашей страны, рассмотреть какую информацию они несут о жизни людей тех далеких лет.

Задачи:

- изучить литературу по теме исследования;
- отобрать задачи с историческим содержанием;
- прорешать задачи, предварительно изучив справочную литературу;
- составить авторские задачи с историческим сюжетом;
- сделать выводы по теме исследования.

Объект исследования: задачи с историческим содержанием.

Предмет исследования: отражение особенностей исторического периода в математической задаче для школьников.

Методы исследования:

- работа с историческими задачами различных математических пособий;
- классификация математических понятий;
- обобщение информации об истории страны, используя различные информационные источники.

1. Задачи с историческим содержанием.

На занятии математического кружка учитель нам предложил для решения задачи, которые решали наши ровесники на первой в России математической олимпиаде по математике. Олимпиада была организована в Ленинграде в 1934 году по инициативе замечательного математика Б.Н.Делоне. Нас заинтересовали эти задачи. Всегда интересно прикоснуться к истории своей страны, поработать с историческими документами. А также захотелось сравнить свои умения в решении задач с умениями учеников, ровесников наших бабушек и прабабушек. Мне стало интересно узнать: какие же задачи решали в разные исторические периоды в нашей стране. Какие задачи на основании исторических событий можно придумать самому?

Задачи, содержащие исторический материал - это хорошие примеры практических задач, позволяющие продемонстрировать, как формальные математические знания применяются в реальных жизненных ситуациях.

1.1. Задачи конца XIX века.

Развитие страны в конце XIX века характеризуют математические задачи, которые предназначались для учеников сельских школ учителем С. Рачинским. Он является автором задачника «1001 задача для умственного счета» 1899 г.

В пособии собраны задачи практического характера, неоднократно прорешанные крестьянскими детьми в начальной и средней школе. Решение большинства задач облегчается придумыванием правила, упрощающего работу с числами в уме. Вот что пишет автор: «Сборник задач, предлагаемый мною товарищам по учительству, составился сам собою. В течение пятнадцати зим я каждый вечер упражнял учеников двух старших групп моей школы (в ней их четыре) в умственном счете. При этом я почти не пользовался печатными задачниками, но постоянно импровизировал задачи возрастающей сложности…» [6].

Действующие лица в задачах – это купцы, лавочники, барышники, чиновники. Сборник содержит большое количество «бытовых» задач и, чтобы решить их современному школьнику, нужно изучить, какие меры: длины, площадей, веса, объема, счета использовали люди в конце XIX века.

№ задачи сборника	*Формулировка задачи*	*Справочный материал*	*Решение*
Задача 2.	Я купил 11 десятин земли по 23 руб. и 13 десятин по 19 руб. Сколько я заплатил?	1 десятина ≈ 1,1 гектара	$11 \times 23 + 13 \times 19 = 500$ р.
Задача 10.	Сколько вершков в 375 аршинах?	1 аршин = 16 вершкам (≈ 0,7112 метра)	$16 \times 375 = 6000$ в.
Задача 15.	На 10 руб. куплено 31 фунт пряников по 18 коп. и 34 фунта орехов. Что стоит фунт орехов?	1 пуд = 40 фунтам (≈ 16,38 килограмма)	$(10 - 31 \times 18):34 = 13$к.
Задача 17.	Некто поехал в город и взял с собою 3 руб. Прожил он в городе неделю и задолжал		3 руб.=300к. 300+1:7=43

	1 коп. Сколько он тратил в день?		
Задача 26.	Сколько в пуде лотов? Сколько в нём золотников?	1 фунт = 32 лотам (≈ 409,512 грамма); 1 лот = 3 золотникам (≈ 12,797 грамма)	$1 \times 40 \times 32 = 1280$ лотов, $1280 \times 3 = 3840$ золотников
Задача 32.	2 сажени 2 аршина 2 вершка. Сколько вершков?	1 сажень = 3 аршинам = 48 вершкам (≈ 2,1336 метра)	48х2 + 48:3х2+2=130
Задача 36.	9 четвертей 9 четвериков 9 гарнцев. Сколько гарнцев?	1 четверть = 8 четверикам (мерам) = 64 гарнцам (≈ 209,91 литра)	$(9 \times 64 + 8 \times 9 + 9) = 657$ г.
Задача 39.	Из 1 стопы 1 дести бумаги сделаны тетради по 7 листов. Сколько тетрадей?	1 стопа = 480 листам; 1 десть = 24 листам	(480+24):7=72
Задача 48.	Богомольцу нужно пройти 500 вёрст в 20 дней. В первые 12 дней он проходил по 23 версты. По сколько должен он проходить в каждый из остальных дней?	1 верста ≈ 1,0668 километра	(500-23х12):8=28

Задача 51.	Я купил 100 грифелей по 6 копеек дюжина и 200 перьев по 3 копейки дюжина. Что я заплатил?	дюжина — двенадцать однородных предметов	6x100:12+3x200:12=100к.=1руб.
Задача 77.	Гросс (12 дюжин) стальных перьев стоит 60 коп. Лавочник купил 5 гроссов и продавал десяток перьев по 5 коп. Сколько барыша?	Гросс — мера счёта (обычно мелких галантерейных и канцелярских предметов), равная 12 дюжинам, т.е. 144 штукам	1). $5 \times 60 = 3р$ 2). $5 \times 144 : 10 \times 5 = 3р\ 60\ к$ 3). 3,6-3=60 к. барыша

В процессе решения задач, возникла необходимость поработать со старинными мерами. Я составил справочную таблицу перевода старинных мер в современные меры.

Задачи оказались очень интересными с точки зрения математики и не всегда простыми для устного счета.

Изучив все задачи, я классифицировал их по принципу использования различных старинных мер. Выбрал задачи на использование различных мер и предложил для решения своим одноклассникам.

1.2 Задачи периода коллективизации (1930-е годы).

Коллективизация сельского хозяйства в СССР - массовое создание коллективных хозяйств (колхозов), осуществлённое в конце 1920-х — начале 1930-х гг., сопровождавшееся ликвидацией единоличных хозяйств. Коллективизация проводилась быстрыми темпами с широким использованием насильственных методов, репрессий по отношению к крестьянству. Привела к значительному разрушению производительных сил, сокращению сельскохозяйственного производства, массовому голоду. Этот период так же нашел отражение в математических задачах для школьников. Вот задачи из учебной книги по математике [4].

Задача №10 (из пособия [4]).

По пятилетнему плану развития промышленности намечалось выпустить черного металла 10 млн. тонн и цветного – 101 тысячу тонн, но согласно постановления ЦК ВКП(б), черного металла должно быть выпущено на 7 млн. тонн больше, а цветного – на 100 тыс. тонн больше. На сколько больше предполагается выпустить металла?

Решение. 10000+7000+101+100 - (10000+101)=7100 тыс. тонн.

Ответ: 7100 тыс. тонн.

Задача № 59(из пособия [4]).

В колхозе им. Сталина овсом было занято 124 га. Каждый гектар дал 8,3 центнера. Как велик урожай овса?

Решение. $124 \cdot 8{,}3 = 1029{,}2$ ц.

Ответ: 1029,2 ц.

Задачи, предлагаемые для решения, очень простые, но богаты по информационному содержанию. Наверное, на математику, как и на большинство школьных предметов, того времени возлагались большие надежды в вопросе просвещения. Решая их, современные школьники, знакомятся с политикой того времени, окунаются в эпоху правления ВКП(б).

Изучая формулировки задач, я нашел учебник по математике для школьников за 1933год [1].   В этом учебнике предлагается провести обследование деревни. (Приложение 1). В обследовании каждого двора необходимо указать количество земли, количество лошадей, инвентарь и т.п. Это очень характерно для периода 30-х годов XX века. Можно предположить, как могли бы использоваться эти данные в период коллективизации и раскулачивания крестьянских хозяйств.

А вот еще задачи из сборника [1], тема которых отражает политическую жизнь страны. К тому времени еще немного было членов партии, чтобы стать членом партии нужно было пройти большой испытательный срок.

№ 439 (сборник [1]).

Партийная организация села в 1931 г. состояла из 11 человек. В 1932 г. Парторганизация выросла до 29 человек, увеличив число членов на 2, а число кандидатов — в 3 раза. Сколько членов и кандидатов в отдельности стало в 1932 г.?

Решение. 1.Пусть x – число кандидатов в 1931г , тогда (11- x) – число членов партии. В 1939 г. : $3x$ – число кандидатов, а $(11-x+2)=(13-x)$ - число членов партии.

1. $3x+13-x = 29$, $x = 8$;

2. $8\cdot 3=24$ кандидата;

3. 13-8=5 членов партии.

Ответ: В 1939 г. будет 24 кандидата и 5 членов партии.

И опять, вроде бы простая математическая задача, а как отражает историю страны.

А вот задача, с помощью которой можно узнать важные сведения о потере населения.

№ 472 (сборник [1]).

Во время империалистической войны Россия потеряла убитыми в 2,25 раза больше, а раненными в $2\frac{7}{8}$ *раза больше, чем Англия. Общие потери Англии составляют 3 млн человек, в России в* $2\frac{2}{3}$ *раза более. Определить отдельные потери раненными и убитыми Англии и России.*

Изучая эту тему, я обратился к истории нашей республики в период коллективизации, и составил собственную задачу (представлена в разделе 2).

1.3. Задачи военного времени (1940-1945 г.г.).

Великая Отечественная война – тяжелое испытание для нашей страны. Несмотря ни на что, в 1945 году в школах прошли выпускные экзамены. Это значит, что и во время войны шли уроки, не смотря ни на что! Занятия проводились в неотапливаемых помещениях, учителей не хватало — ушли на фронт, голодными были и ученики, и учителя, тетрадей не было — промышленность работала на войну, на Победу, а потому писали на полях газет. Большинство ребят потеряли отцов, мамы сутками работали, выпуская военную продукцию, да и сами подростки работали на заводах — и это наши сверстники. И наконец, вот он, выпускной экзамен 1945 года.

Нами, при изучении литературы, найден текст «Письменная работа по алгебре (с арифметикой) для экзамена на аттестат зрелости в 1944/1945 учебном году» (Приложение 2).

Письменная работа по алгебре (с арифметикой)
для экзамена на аттестат зрелости в 1944/45 году.

Запасный вариант

1. Задача. *Расстояние между двумя аэродромами А и В равно* **S** *км. Из А в В вылетает первый самолет, а через* **m** *часов ему навстречу вылетает второй самолет со скоростью на* **b** *км в час больше первого. Встреча их произошла на середине пути. Определить скорость того и другого самолета.*

2. *В разложении бинома* $\left(\sqrt{a} + \sqrt[\frac{1}{3}]{a^2}\right)^m$

коэффициент пятого члена относится к коэффициенту третьего члена как 7:2. Найти член разложения, содержащий букву «а» в первой степени.

3. *Решить систему неравенств:* $\begin{cases} 4x + 7 > 2x - 13 \\ 3x + 18 > 2x + 1 \end{cases}$

4. Выполнить действия:

$$\frac{\left(4{,}07 : \frac{1}{20} - 23{,}01 \cdot 0{,}06\right) : 4 + 0{,}0703 \cdot \frac{1}{2}}{\left(7{,}3745 : 3{,}01 - 1\frac{1}{4}\right) \cdot 1{,}02 + 0{,}78}$$

В отличие, от задач более раннего времени, задачи военного времени содержали минимум информации. Первая задача работы на перелет самолетов. И нет ни одного числового значения. Это характерно для периода 1935-х – 1946-х годов. Вначале страна находилась в ожидании войны, а затем и в состоянии войны. Задачи военного времени не содержали конкретных величин, если это касалось скоростей самолетов, — военная тайна. Поэтому всякое упоминание технических данных военной техники, даже в школьных учебниках было запрещено. Ниже приведена задача, которая, как мне кажется, подтверждает это утверждение.

Задача. (Всероссийская олимпиада школьников,1940 год).

Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

Решение.

x – скорость течения, а x_1 – скорость парохода, тогда:

$5\cdot(x+x_1)=7\cdot(x_1-x)$.

$x_1=6x$, то есть скорость парохода в шесть раз больше скорости течения.

Плот плывет со скоростью течения.

Пароход плыл со скоростью $7x$ (скорость парохода + скорость течения), скорость плота в в 7 раз меньше, значит $7\cdot5=35$ дней.

Ответ: 35 дней.

Эта задача была предложена для решения учителем в моем классе. Всех нас заинтересовал не столько текст задачи, сколько тот факт, что ее решали наши сверстники 1940 года. Многие решили проверить себя и успешно справились. Были предложены разные решения. Все остались довольными своими успехами. Сведения, которые рассказывает учитель перед решением таких задач, побуждают большой интерес к военному времени. Я также на основе исторических фактов составил авторские задачи с историческими фактами (представлены в разделе 2).

1.4 Задачи периода восстановления народного хозяйства (1950-е годы).

Послевоенное время, стране нужно продовольствие, взят курс на освоение целинных земель. Правительство постоянно ставит задачу перед народом: перевыполнить план, повысить производительность труда. Многие математические задачи того времени ярко иллюстрируют напряженный труд народа по восстановлению народного хозяйства.

Рассмотрим примеры олимпиадных задач для школьников 5-7 классов г. Москвы [5], которые я и мои одноклассники решали на занятиях математического кружка.

Задача 1 (Московская олимпиада, 1950/51 уч. год).

Если грузить ежемесячно по 1500 вагонов, то через несколько месяцев годовой план окажется недовыполненным на 6000 вагонов, но так как грузили по 1800 вагонов в месяц, то к концу этого же времени план остался недовыполненным на 3600 вагонов. Сколько вагонов погружено сверх плана за год?

Решение.

x – количество месяцев, которые грузили по 1500 вагонов.

$1800x – 1500x = 2400$,

$x=8$, тогда если грузить по 1500, то в год 1500х12=18000 вагонов.

По 1800 – $1800 \cdot 12=21600$ вагонов в год.

21600-18000=3600 вагонов сверх плана.

Ответ: 3600 вагонов сверх плана.

Задача 2 (Московская олимпиада, 1952/53 уч. год).

Объем строительных работ увеличивается на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда будет увеличена на 20%?

Решение.

100%+80%=180%=1,8 стал объем работ после увеличения;

100%+80%=120%=1,2 производительность после увеличения;

1,8:1,2=1,5 = 150%- нужно рабочих;

150%-100%=50%.

Ответ: на 50% увеличить количество рабочих.

Решая такие задачи, возникает чувство гордости за свою Родину, за труд людей, которые сделали большой вклад в развитие своей страны.

Мордовия также внесла свой значительный вклад в поднятие промышленности страны послевоенного времени. Это иллюстрируют моя авторская задача, составленная на основе исторических фактов [8] (представлена в разделе 2).

2. Авторские задачи с историческим сюжетом.

В процессе своего исследования математических задач я прочитал много исторических сведений о разных этапах развития своей страны. На основании изученного материала я составил задачи, которые имеют интересные подлинные факты. Эти задачи я предложил своим одноклассникам для решения.

Задача 1.

В 1926 г. население Мордовии составляло 1259 тыс. чел., в 1939 г. - 1187 тыс., в 1959 г. -1002 тыс., в 1973 г. - 1029 тыс. чел. Доля городского населения выросла с 7% в 1939 г. до 40% к началу 1973 г. Сколько городского населения было в республике в 1939 г., к началу 1973г. Во сколько раз увеличилось население городов?

Решение.

1). $1187 \cdot 0{,}07 = 83{,}09$ тыс. городского населения в 1939г.

2). $1029 \cdot 0{,}4 = 410{,}8$ тыс. городского населения в 1973г.

2). $410{,}8 : 83{,}09 = 4{,}9$ раза.

Задача 2.

В 1966—1970 гг. в Мордовии темпы роста промышленного производства были выше, чем в Волго-Вятском регионе и РСФСР в целом, было освоено 930 млн. руб., что в 1,5 раза больше, чем в предыдущее пятилетие; на долю тяжёлой промышленности приходилось более 53 % всей продукции. Сколько денег было освоено в предыдущее пятилетие? Сколько приходилось на долю тяжелой промышленности в млн. руб.?

Решение.

1).$930 : 1{,}5 = 620$ млн. рублей;

2).$930 \cdot 0{,}53 = 492{,}9$ млн. рублей.

Задача 3.

Общий ущерб, нанесенный народному хозяйству СССР второй мировой войной, составляет 2569 млрд.р. Сколько школ можно было бы построить на средства, потерянные нами в годы Великой Отечественной войны, если считать, что стоимость строительства новой четырехэтажной школы составляет 8 млн.600 тыс. руб. (в ценах, действовавших до 1 января 1961 г).

Решение.

2569000000000:8600000= 29871 школа.

Задача 4.

В таблице указаны соотношения сил сторон к началу контрнаступления Красной Армии под Москвой.

	Численность войск	Численность вооружения		
		орудия и минометы	танки	самолеты
СССР Германия	1100000 1708000	7652 13500	774 1170	1000 615

Сопоставьте численность войск и вооружения СССР и Германии под Москвой.

Решение.

1) 1708000 : 1100000=1,6 раза - численность войск Германии больше.

2) 15285: 9426 =1,62 раза - численность вооружения Германии больше.

Задача 5.

Всего с 19 ноября 1942 года по декабрь 1943 года фашистская Германия потеряла на советско-германском фронте около 2,6 млн. человек, почти 50 тыс. орудий и минометов, до 7 тыс. танков, более 14 тыс. боевых самолетов. Сколько человек, орудий, танков, самолетов теряла армия противника ежемесячно, за указанный период.

Задача 6.

К лету 1943 года в составе действующей армии было свыше 6 млн. 400 тыс. человек, 105 тыс. орудий и минометов, 2200 боевых установок полевой реактивной артиллерии, 10, 2тыс. танков и самоходно-артиллерийских установок, свыше 10 тыс.

боевых самолетов. Вычислите процентное отношение каждого вооружения к общему количеству перечисленных вооружений.

Решение.

1) 105+2,2+10,2+10=127,4 тыс. единиц вооружений;

2) 105:127,4· 100=82,4% - орудия;

3) 2,2:127,4· 100=1,72% - артиллерия;

4) 10,2:127,4· 100=8% - танки;

5) 10:127,4· 100=7,8% - самолеты.

Задача 7.

Наряду с денежными средствами колхозники внесли в фонд Советской Армии 1200 тысяч пудов зерна, 1150 тысяч пудов мяса, много молока, масла, картофеля, овощей, отправили фронтовикам более 300 тысяч предметов теплой одежды и обуви, сотни тысяч подарков. Узнайте, сколько кг зерна и мяса было отправлено? (1 пуд=16 кг).

Решение.

(1200+1150) · 16=37600 кг.

Задача 8.

Во время войны жители республики внесли крупные суммы на приобретение боевой техники. Денежных взносов было сделано всего на 170 миллионов рублей. Коммунист А. Г. Гаязов внес 105 тысяч рублей на покупку самолета для Героя Советского Союза Александра Кочетова. Сколько процентов от общей суммы это составляет?

Решение.

105000· 100:170000000~ 0,062%.

Задача 9.

Подсчитайте, сколько граммов весит военная пайка хлеба 1/8 часть буханки хлеба массой в 1 кг?

Решение. 1000· 1/8 = 1*25 г.*

Задача 10.

Какую часть буханки составляет одна треть от восьмушки?

Решение. 1/8х1/3 = *1/24 часть буханки.*

Совсем недавно завершилась зимняя олимпиада в Сочи. Много интересных фактов, связанных с зимними видами спорта, я узнал из телепередач и из Интернет. На основе этих материалов я составил задачи, которые должны быть интересными для решения.

Задача 11.

На олимпиаде в Сочи на соревнованиях по шорт-треку Виктор Ан завоевал золото на дистанции 500 м с результатом 41,312 сек, бронзу на дистанции 1500 м с результатом 21,15062 мин. Какова средняя скорость спортсмена в км/ч? Сколько кругов прошел спортсмен на второй дистанции, если стандартная длина окружности трассы составляет 111,12 метров?

Задача 12.

Стиральная машина при отжиме делает 6 оборотов в секунду. Это на 3600 оборотов в час больше, чем количество оборотов, которые выполняет фигурист при четверном тулупе. Какое количество оборотов в секунду выполняет фигурист при четверном тулупе?

Задача 13.

Для Олимпийских игр в Сочи была построена уникальная трасса «Санки». Длина ледового желоба 1814 метров. Олимпийские чемпионы по бобслею Александр Зубков, Алексей Воевода прошли ее в 2014 году за 3,4539 мин. Какова скорость движения боба в км/ч.

Для меня поиск информации для составления задач был познавательным. Такие задачи учат не только вычислять. Обращение к родной истории, к событиям, которые происходят в нашей стране, заставляют внимательнее и бережнее относиться к тому, что нас окружает.

Заключение.

Математические задачи, которые решали школьники в разные периоды - отражают различные стороны жизни людей, несут много полезной информации о том времени, в котором жили. Поэтому решение таких задач помогают лучше узнать историю, позволяет погрузиться в прошлое, реально представить его картины и вместе с тем как бы стать участником былых событий.

В процессе работы мною были изучены исторические материалы, методы составления и решения математических задач. Всё это в целом, способствовало тому, что мною были составлены математические задачи, содержание которых отражает историю моей страны. Они не сложны в решении, но несут богатую информацию. Я считаю, что процесс составления и решения задач, включающих исторические сведения, способствует развитию творческого, логического, критического мышления, эрудиции, умения классифицировать и обобщать, расширяют наш кругозор.

И чем больше вопросов возникает у нас в этом математическом путешествии по страницам прошлого, чем целеустремленнее мы будем искать ответы на них в книгах и исторических документах, тем ближе и понятнее станет для нас даль былых времен.

Список литературы.

1. Добровольский В.В. Математика для пятого года трудовой школы.- Москва: Государственное издательство, 1933г.
2. История мордовской АССР, в 2 т., 1979г., Мордовское книжное издательство
3. Кочеткова Н.А. Математика сквозь призму истории //Математика, № 11, 2012
4. Малыгин Г.В., Цеплиев Ф.К., Лунев Н.Н., и др. Учебная книга по математике. 4-й год обучения. – Воронеж: книгоиздательство «Коммуна», 1932 г.
5. Прасолов В.В., Голенищева-Кутузова Т.И. и др. Московские математические олимпиады 1935-1957 г. М.: издательство МЦНМО, 2010 г.
6. Рачинский С.А.1001 задача для умственного счета. - С.Петербург: издательство училищного совета , 1899 г.

7. Электронный ресурс: Всероссийские олимпиады школьников http://www.rosolymp.ru
8. Электронный ресурс: История Мордовии http://www.mordovia.info
9. Электронный ресурс: Математические этюды http://www.etudes.ru/ru/sketches/
10. Электронный ресурс: Новости спорта http://www.eurosport.ru/

Приложение 1 . Страница из учебника В.В.Добровольской. Математика для 5 класса трудовой школы.

ОСЕННИЙ ТРИМЕСТР

ОБЩАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ТЕМА: ФОРМЫ СЕЛ.-ХОЗ. ПРОМЫШЛЕННОСТИ.

1. ОБСЛЕДОВАНИЕ ДЕРЕВНИ.

Составьте результат вашего обследования деревни примерно в таком виде.

По каждому двору занесите:

1) Количество принадлежащей ему земли с указанием хлебов (если можно, то определите приблизительно количество земли под каждым видом хлеба, под паром, под огородом и т. д.).

2) Количество людей с разделением на две категории — рабочих и нерабочих (старики, малые дети).

3) Количество лошадей и другого скота с указанием количества скота каждого вида, а по возможности и птицы.

4) Инвентарь: телеги, сани, сельскохозяйственные орудия (плуги, бороны и т. п.).

После такой сводки подведите общий итог по каждой графе и определите для каждой величины среднюю цифру на 1 двор. Какое действие надо сделать для этого?

Сравните данные каждого двора с найденной средней цифрой и определите уклонение отдельных дворов от средней цифры. Какое действие надо сделать для этого?

Если у двора окажется какая-нибудь величина больше средней, то уклонение представляет повышение качества этого двора против среднего и обозначается постановкой знака $+$ перед числом, указывающим величину этого повышения; так, $+1,4$ гектара обозначает, что количество земли у данного двора больше среднего на 1,4 гектара.

5

Приложение 2. Письменная работа по математике за 1944-45 год.

Управление начальных и средних школ НКП РСФСР

Письменная работа по алгебре (с арифметикой) для экзамена на аттестат зрелости в 1944/45 учебном году.

Запасный вариант.

1. **Задача.** Расстояние между двумя аэродромами A и B равно S км. Из A в B вылетает первый самолет, а через m часов навстречу ему вылетает второй самолет со скоростью на b км в час больше первого. Встреча их произошла на середине пути. Определить скорость того и другого самолета.

2. В разложении бинома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^m$

коэфициент пятого члена относится к коэфициенту третьего члена как 7 : 2. Найти член разложения, содержащий букву «a» в первой степени.

3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 4x + 7 > 2x - 13 \\ 3x + 18 > 2x + 1 \end{cases}$

4. Выполнить действия:

$$\frac{\left(4{,}07 : \frac{1}{20} - 23{,}01 \cdot 0{,}06\right) : 4 + 0{,}0703 \cdot \frac{1}{2}}{\left(7{,}3745 : 3{,}01 - 1\frac{1}{4}\right) \cdot 1{,}02 + 0{,}78}$$

Г—24.3.45 ЦТ НКО

Заказ № 259а

Управление образования Администрации г.о. Саранск
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Лицей № 43» г.о. Саранск

Исследовательская работа
Геометрия пчелиных сот

Выполнил: ученик 8 класса,
Уланов Кирилл

Научный руководитель:
учитель математики
МОУ «Лицей № 43»,
Лобанова Ольга Евгеньевна

Саранск, 2009

ВВЕДЕНИЕ

Жизнь и деятельность пчел всегда привлекала внимание человека, исследователей своей изумительной красотой и изяществом. «Странные общественные привычки и геометрические дарования пчел, - пишет известный математик Герман Вейль, - не могли не привлечь внимания и не вызвать восхищения людей, наблюдавших их жизнь и использовавших плоды их деятельности». Медоносные пчелы любят и умеют сооружать для себя самые замысловатые восковые квартиры. Ученые разных стран не раз в порядке эксперимента заставляли их строить соты, казалось бы, в невероятных условиях — снизу вверх, не предоставляя насекомым твердой опоры, в стороны, по кольцу и спирали. И что же? Дружная пчелиная семья всякий раз охотно бралась за строительство, терпеливо трудилась и возводила многоэтажные восковые пирамиды. Не гнездом, а целым висячим городом-кладом, состоящим из нескольких десятков, а то и сотен тысяч благоустроенных квартир и складских помещений, компактно размещенных под общей крышей, было бы правильнее всего именовать такое уникальное восковое сооружение. Пчелы на практике решили задачу строительства ячейки для размещения возможно большего количества меда и экономии воска.

Чарльз Дарвин отмечал: «Далее этой ступени совершенства в архитектуре естественный отбор не мог вести, потому что соты пчел абсолютно совершенны с точки зрения экономии труда и воска».

Где научились пчелы делить самым бережным образом одну большую площадь на несколько мелких частей?

Как они осознали устойчивость, преимущества шестиугольника перед равносторонним треугольником и квадратом?

Как должна пчелами применяться геометрия для того, чтобы не растратить попусту воск, используемый при закупорке открытого конца сотов, представляющих собой шестиугольную призму?

Какую экономическую выгоду преследуют насекомые?

Эти вопросы мы попытались рассмотреть в данной исследовательской работе.

Цель исследования – изучить формы пчелиных сот и ячеек и геометрические принципы их построения.

Задачи исследования:

1) изучить литературу по данному вопросу;

2) познакомиться с геометрическими принципами построения пчелиных сот;

3) выявить закономерности построения пчелиной ячейки;

4) провести математический анализ строения пчелиной ячейки;

5) проанализировать экономическую выгоду построения соты;

6) рассмотреть использование геометрических закономерностей построения пчелиных сот в различных областях;

7) сделать выводы о значении геометрических способностей пчел.

Объект исследования: пчелиные соты, структурный элемент пчелиных сот - пчелиная ячейка.

Предмет исследования: геометрические принципы построения пчелиных сот.

Гипотеза: идеальной геометрической фигурой для построения пчелиных сот является шестиугольник.

Методы исследования: математический анализ, моделирование, классификация, сравнительный анализ.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ПЧЕЛИНЫХ СОТ

1.1. Использование многоугольников в построении пчелиных сот.

Необычная архитектура пчелиных сот всегда привлекала внимание многих людей. Пчелиные соты состоят из довольно тонких, близко расположенных друг к другу шестиугольников, стенки которых составляют примерно 0,1 мм.

Рассмотрим, как используются в пчелиной архитектуре геометрические правила. Круг – это геометрическая фигура, обладающая самым коротким размером сторон при окружении части плоскости. Например, при сравнении круга и квадрата площадью 10 см^2 можно отметить то, что длина окружности значительно меньше периметра квадрата. Однако в строительстве сот дело обстоит иначе. Вместительная сотовая рамка делится на равные, более мелкие части, причем при делении используется форма, наиболее подходящая по ее длине. Если мы начнем делить рамку на равные соты в виде мелких кругов, то будет создана самая короткая длина, но тогда понадобится намного больше воска для закупорки оставшихся пустых мест. И пчелам просто не выгодно так тратить воск и свои силы.

Однако, если мы будем рассматривать деление на соты с точки зрения геометрии, то для достижения меньших затрат материала (воска) и получения наименьшей длины грани, придется делить плоскость на многоугольники. Попытаемся представить себе разделение плоскости на множество многоугольников с *n* количеством сторон. Среди них правильный *n*-угольник тот, который обладает самой короткой длиной периметра. Например, обладателем самого короткого периметра среди треугольников является равносторонний треугольник, а среди четырехугольников – квадрат. Подобным образом, сравнивая между собой пяти- и шестиугольники, приходим к выводу, что, только будучи правильными, они могут обладать самым коротким периметром.

При изучении пчелиных сот возникает вопрос о том, какой же из правильных многоугольников следует использовать при делении единого пространства. Рассмотрим круг и часть вписанного в него правильного треугольника (рис.1).

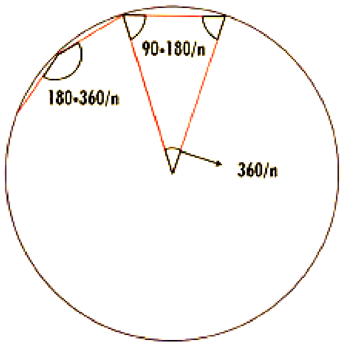


Рис.1

Внутренний угол многоугольника равен 180-360º/*n*. При делении единой плоскости на более мелкие части, необходимо учитывать тот факт, что соседние части должны плотно прилегать друг к другу, не оставляя при этом пустого пространства. Для этого сумма внутренних углов стенок, прилегающих друг к другу ячеек, должна составлять 360º (рис. 2).

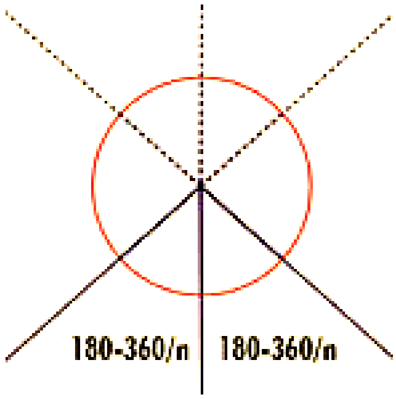


Рис.2

Рассмотрим, какими правильными многоугольниками можно покрыть плоскость? Используем метод уравнений. Предположим, что плоскость покрыта правильными *n*-угольниками, причем каждая вершина является общей для *x* таких многоугольников, α - внутренний угол правильного многоугольника, равный $\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ (рис.3).

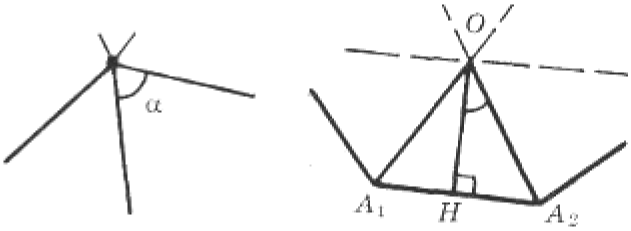


Рис.3

Тогда $\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 360^\circ$.

$$\frac{(n-2)}{n} \cdot x = 2; \quad \frac{x(n-2)}{n} = 2; \quad x(n-2) = 2n; \quad x = \frac{2n}{n-2} > 2; \quad \frac{2n}{n-2} - 2 > 0;$$

Из этого равенства находим:

$$x = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

Учитывая, что x – целое, получаем n = 3, 4, 6.

Итак, плоскость можно покрыть правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками.

Проверим полученные данные.

При n = 3 получаем три угла, которые плотно составленные, составляют 180°, шесть углов - 360°, таким образом плоскость покрывается полностью без просветов (рис.4).

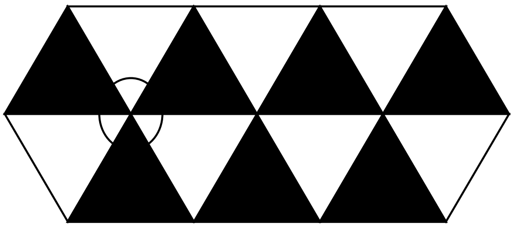


Рис.4

При n = 4 получаем четыре угла, которые вместе составляют 360°, т. е. 90°4 = 360°, плоскость покрывается полностью без просветов (рис.5).

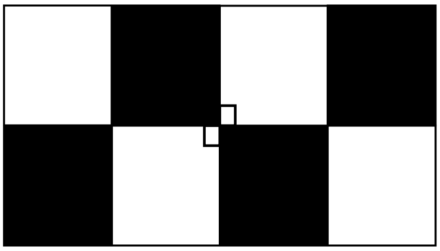


Рис.5

При n=5 имеем, что внутренний угол правильного пятиугольника равен 108°, 108°*3 = 324°, поэтому остается просвет в 36° (рис.6), таким образом плоскость без просветов не покрывается.

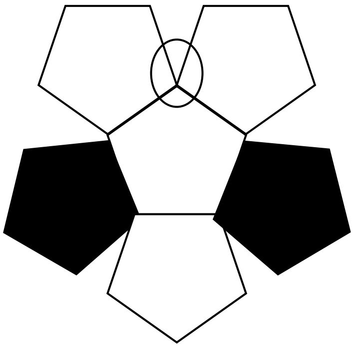


Рис.6

При $n = 6$ получаем, что внутренний угол правильного шестиугольника равен 120^0, т.е. три шестиугольника, составленные вместе, образуют 120° *3 = 360°, поэтому плоскость покрывается полностью без просветов (рис.7).

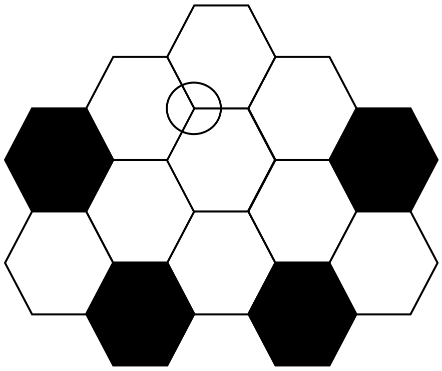


Рис.7

Продолжая проверку, делаем вывод, что плоскость без просветов можно покрыть лишь правильными треугольниками, квадратами и правильными шестиугольниками.

Но почему пчелы выбрали именно шестиугольник? Для ответа на этот вопрос нужно сравнить периметры разных многоугольников, имеющих одинаковую площадь. Рассмотрим правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. У какого из этих многоугольников наименьший периметр?

Произведём вычисления для правильных многоугольников.

1) Пусть имеем *ABCDEF* – правильный шестиугольник, $A'B'C'D'$ - квадрат, $A''B''C''$ - правильный треугольник (рис.8). Обозначим S_n – площадь, P_n – периметр n–угольника, $AB = a$. Тогда

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \approx 2.55a^2, \quad P_6 = 6a$$

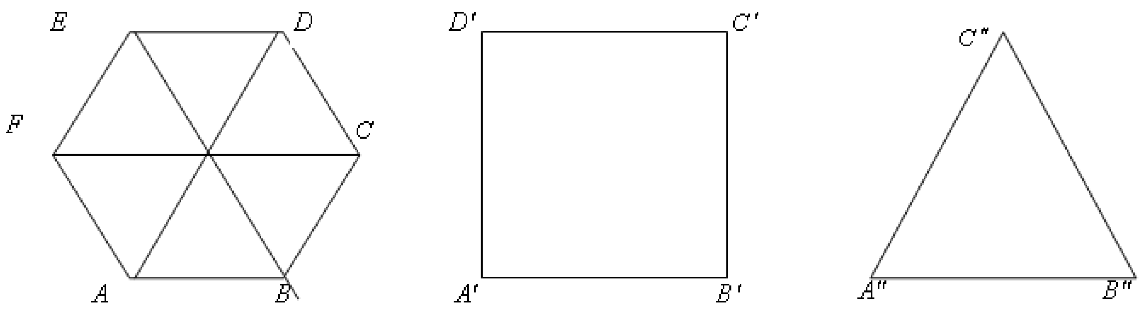


Рис.8

Все площади равны, а значит, мы имеем: $S_4 = 2.44a^2, A'B' \approx 1{,}6a$. Отсюда $P_4 \approx 6.4a$

Пусть $A''B'' = b.$ Выразим b через a, тогда $S_3 = \frac{b^2}{2}\sin 60^\circ = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$

Но $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3a^2}}{2}, b^2 = 6a^2, b = a\sqrt{6} \approx 2.4a, \quad P_3 \approx 7.2a$

Итак, параметры многоугольников, имеющих одну и ту же площадь, относятся как
$P_6: P_4: P_3 = 6: 6{,}4: 7{,}2$ или 3: 3,2: 3,6.

Вывод: при условии одинаковой площади многоугольников наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Таким образом, только используя данную фигуру, можно максимально сократить расходование воска.

Математиками были проведены исследования с целью изучения возможного использования многоугольников с изогнутыми сторонами. При наличии изогнутой стороны многоугольник принимает выпуклую форму, причем находящийся рядом с ним другой многоугольник автоматически приобретает сторону, вогнутую вовнутрь. Наличие у многоугольника выпуклой стороны имеет и преимущества, так как он приобретает форму, близкую к кругу, а соседствующий с ним многоугольник с вогнутыми сторонами, хотя и не имеет преимуществ, зато снижается площадь поверхности.

1.2. Строение пчелиной ячейки.

В течение длительного времени я исследовал строение пчелиных сот. Изучал соты и основной структурный элемент сот - пчелиную ячейку: в улье, в рамке, проводил наблюдения целиком, в срезе, под увеличительным стеклом (фото 1-6). Я заметил, что соты в улье свешиваются сверху вниз наподобие занавесок: пчёлы прикрепляют их к потолку смесью воска и прополиса. Они предназначены для вывода молодых пчёл, хранения мёда и перги.

фото 1

фото 2

фото 3

фото 4

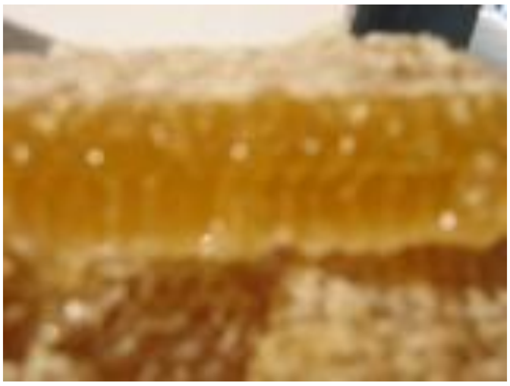
 

Фото 5 фото 6

С помощью математических расчетов, я убедился, что из трёх правильных многоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Стало быть, мудрые пчёлы экономят воск и время для построения сот. Несмотря на то, что уже довольно давно известен тот факт, что идеальной фигурой для построения сот является шестиугольник, до сих пор нет точных объяснений этого феномена. И только лишь в 1999 году представилась возможность доказать, что пчелы, не ошибаясь, проделывают уже миллионы лет. Однако, если бы пчелиная техника строения ячеек, пройдя эволюцию, дошла бы до наших дней, то в окаменелостях должны были бы встретиться и другие геометрические фигуры, помимо шестиугольника. Однако следов использования в пчелиных сотах других фигур не зафиксировано.

Надо сказать, что на этом секреты пчёл не заканчиваются. Интересно и дальше исследовать строение пчелиных сот. Ячейки уложены в пласты и соприкасаются общими донышками. Но донышки ячеек не плоские, а представляют собой части трёхгранных углов, гранями которых являются равные ромбы (рис.9).

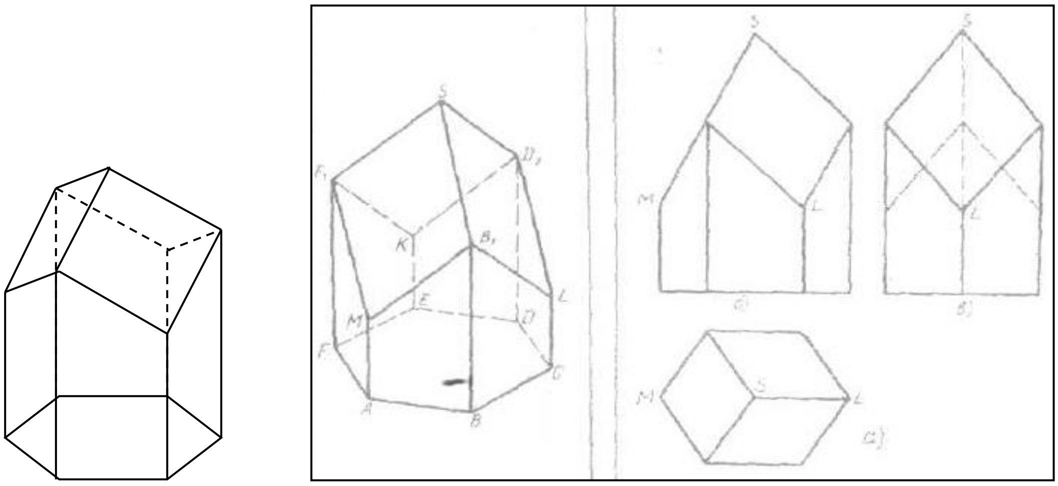


Рис.9

Рассмотрим строение пчелиной ячейки с геометрической точки зрения.

Построим изображение правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Проведём диагонали F_1B_1, B_1D_1, F_1D_1 верхнего основания призмы и на оси призмы OO_1 возьмём некоторую точку S (рис.10).

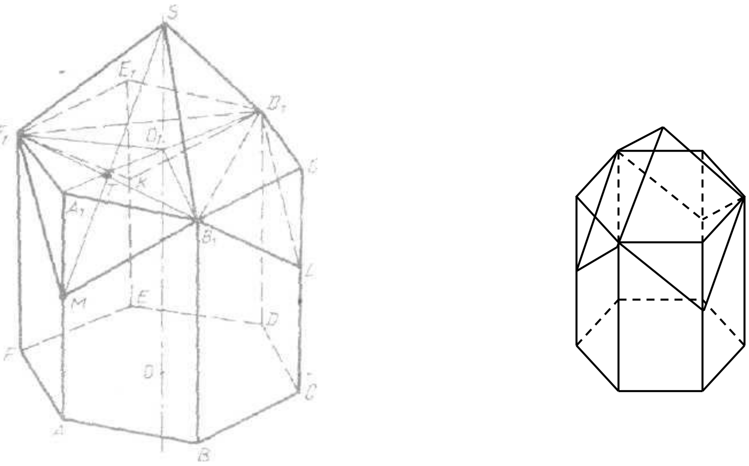
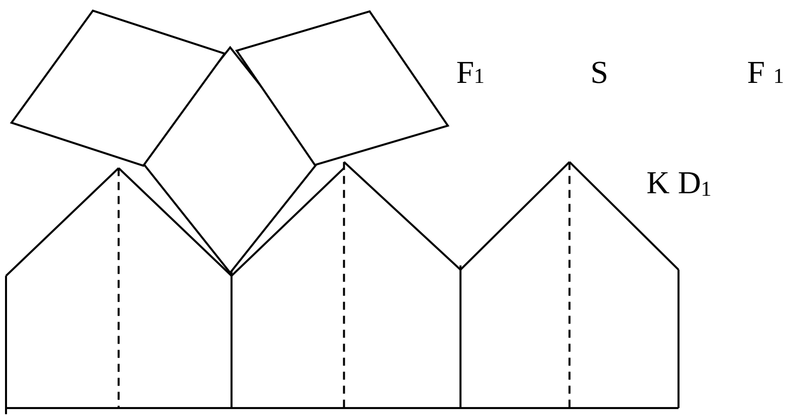


Рис.10.

Через прямые F_1B_1, B_1D_1, F_1D_1 и точку S проведём три плоскости, которые отсекают от призмы три равные треугольные пирамиды $MB_1F_1A_1$; $LB_1D_1C_1$; $KD_1F_1E_1$. Получившийся многогранник $SABCDEFF_1MB_1LD_1K$ и является пчелиной ячейкой. Поскольку боковая поверхность многогранника представляет собой шесть равных между собой трапеций, то для получения развёртки построим эти трапеции. Их размеры совпадают размерами на рис.9, причём отрезок MS - это диагональ ромба в верхней части ячейки.

Построим отрезок AA_1= AB+BC+ CD+DE+EF+FA_1 (рис.13).На продолжении ребра CL (используя рис.10, 11) от точки L отложим отрезок LS и из точки L проведём окружность радиусом, равным, например отрезку B_1L. После этого построим середину отрезка LS, проведём через неё перпендикулярную к нему прямую, которая пересечёт дугу окружности в двух вершинах ромба. Два других ромба строим следующим образом: из вершины ромба D_1 проводим окружность радиусом равным стороне построенного ромба, а из вершины S - окружность, радиус которой равен диагонали ромба. Эти окружности в пересечении дают ещё одну вершину ромба. Произведём остальные построения. Соединяем точки S, D_1 и K и из точки D_1 проводим перпендикуляр к SK. От точки пересечения O откладываем расстояние отрезка D_1O_1 и получаем точку F_1. Или точку пересечения окружности радиусом SD_1 с D_1O также получаем точку F_1. Можно также найти точку F_1, как пересечение окружности радиусом равным SB_1 с D_1O. Соединяем точки S, F_1, K, D_1 и получаем искомый ромб. Далее по аналогии достраиваем ромб SF_1MB_1. Получили донышко ячейки. Развёртка пчелиной ячейки готова (рис.11) .



MB_1

M M

A BF_1 CL DD_1 EK FF_1 A_1

Рис.11

Рассматривая пчелиные соты, можно увидеть, как соприкасаются ячейки: их общей частью является ромб (рис.12).

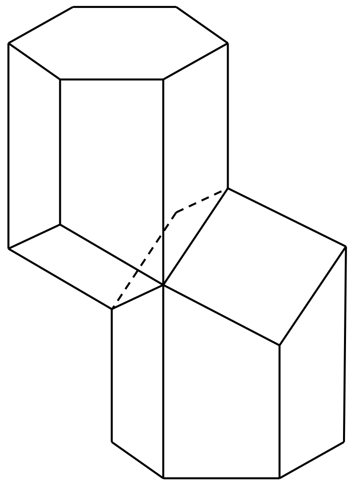


Рис.12

Возникает вопрос: почему пчёлы строят донышки своих ячеек в форме части трёхгранного угла, в качестве граней которого служат ромбы? Нельзя ли было поступить проще, сделать дно плоским, т.е. обычным правильным шестиугольником? Какая же здесь выгода для пчёл? Для ответа рассмотрим ячейку - многогранник (рис.9).

Объём многогранника $SABCDEFF_1MB_1LD_1K$ равен объёму правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Как нетрудно заметить, объём пирамиды $B_1D_1F_1S$ равен утроенному объёму одной из равных пирамид $SF_1B_1O_1$, $SB_1D_1O_1$, $SD_1F_1O_1$. Пирамиды $MA_1F_1B_1$ и $SO_1B_1F_1$ равны (они симметричны относительно точки T).

Итак, объёмы пчелиной ячейки и правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны.

А у какого из данных равновеликих многогранников: правильная шестиугольная призма и « пчелиная ячейка», наименьшая площадь поверхности?

Путём расчётов в математической литературе приводятся следующие данные: пчелиная ячейка имеет такой же объём, как правильная шестиугольная призма, а так как площадь её поверхности меньше площади поверхности призмы, то остаётся удивляться экономии пчел. В имеющейся литературе приводятся сведения о том, что благодаря такой « математической» работе расчётливые «геометры» экономят около 2% воска. Количество воска, сэкономленного при постройке 54 ячеек, может быть использовано для одной такой же.

1.3. Пчелиные соты, как трёхмерное образование.

Пчелиные соты – это трехмерное тело, состоящее из шестиугольных призм. Такие призмы образуют два слоя с открытыми концами, при этом закрытые ее концы плотно соединены друг с другом (рис.13).

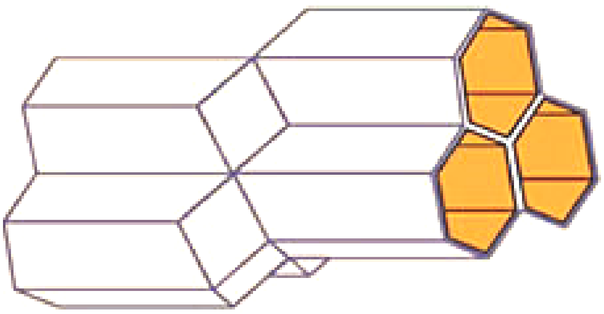


Рис.13

При вертикальном расположении рамки, эти призмы будут построены с наклоном под углом в 130^{o} к горизонтали – наименьшим углом, при котором не будет происходить вытекание меда.

Интересно, как использовать знания геометрии с целью минимальной траты воска? В 1964 году математик Фейеш–Тот продемонстрировал оптимальный способ закупорки сот при помощи пар шестиугольников и квадратов (рис.14).

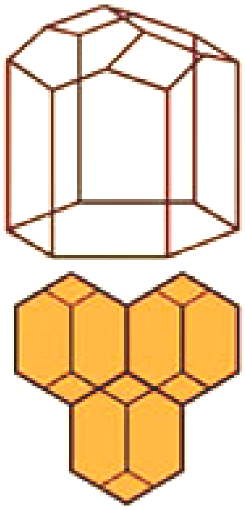


Рис.14

Однако пчелы закрывают соты немного иначе – при помощи трех равносторонних четырехугольников. Внутренние углы равносторонних четырехугольников, равные 70,5º и 109,5º, представляют собой идеальное математическое решение формы крыши, состоящей из трех равносторонних четырехугольников. Однако, в используемых пчелами площадях, на которых находились два шестиугольника и два квадрата, наблюдалась небольшая потеря в 0,035%. Но при этом имелась ускользнувшая от внимания исследователей точка, которая указывала на уменьшение толщины стен. Чтобы испытать математическую модель Тота, исследователи использовали жидкую воздушную пену. Они накачали в отверстие между двумя стеклами в два слоя порошок, обладающий пузырьками диаметром в 2 мм. Пузырьки, прикасавшиеся к стеклам, начинали превращаться в шестиугольные структуры. Посередине границы двух слоев образовались формы двух шестиугольников и двух четырехугольников. При уплотнении стенок пузырьков произошел интересный случай. Образовавшаяся структура вдруг, как и у пчел, превратилась в форму трех равносторонних четырехугольников. Эксперимент подтвердил, что идеальная схема построения сот все-таки дарована пчёлам свыше.

В 1999 году Томас Хейлз (Thomas Hales) из Мичиганского университета поставил точку в спорах о конструировании сот. Он доказал, что идеальной фигурой при делении единого пространства на более мелкие части является правильный шестиугольник.

В итоге необходимо сказать, что пчелиные соты представляют собой пространственный паркет, поскольку заполняют пространство так, что не остаётся просветов.

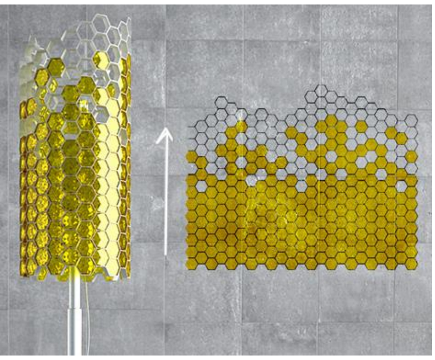
Чарльз Дарвин лично охарактеризовал медовые соты, как чудо инженерии, позволяющее пчелам экономить воск.

2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ СОТ.

Соты - это одна из самых интересных структур в природе. Рассмотрим, где человек может использовать умение покрывать плоскость правильными многоугольниками, взяв за основу алгоритм пчелиной соты создавать и находить новые решения.

Дизайн-проекты

Мягкий конструктор, который по форме напоминает пчелиные соты. Это некая комбинация между вариантом детской мебели и мягкой игрушкой. Мало того, что в этих огромных сотах приятно покувыркаться, так дети еще могут самостоятельно построить из него какой-нибудь замок, или тоннель.

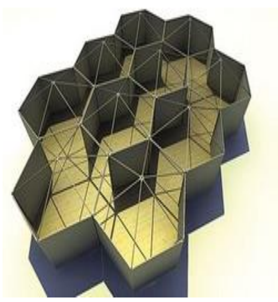


В «сотовой» лампе дизайнером проведена параллель ценности меда и света в природе. Взяв за основу пчелиные соты, и заполнив их янтарными кристаллами, дизайнер создал диковинные плафоны. Структура плафона-«улья» формируется по тому же алгоритму, что и медовые соты в пчелином доме.

Необычные жалюзи придумал дизайнер Айвэн Хубер Кроме многофункциональности, жалюзи примечательны своим дизайном. Закрытое ими окно напоминает пчелиные соты. А вместо меда они накапливают энергию. Днём с их помощью можно приглушить яркое освещение, но и накопить солнечной энергии для тёмного времени суток.

Архитектурные ансамбли

Принцип « пчелиных сот» широко используется в строительстве архитектурных ансамблей всего мира. Церковь Сан Иво. 1642-1660 годы. Она расположена во дворе римского университета. Имеет план медовой соты и вписанную в него пчелу.

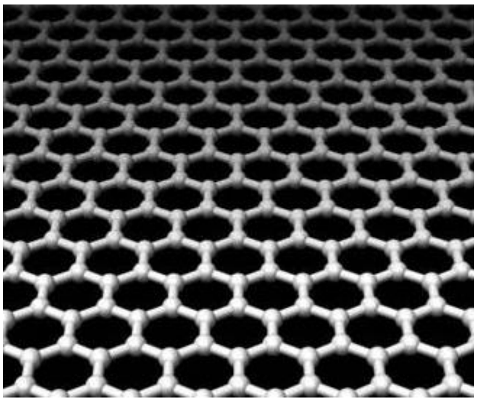


Моносота – это шестигранная комната-трансформер площадью 40 кв.м. Шестигранная форма, подобно сотам, позволяет оптимально распределить нагрузки. Сборка из сот позволяет уменьшить расход времени и материалов в несколько раз. Именно это делает возможным строительство гигантских сооружений. В сотовом небоскребе нет несущих конструкций, на которые «падает» весь его вес. Несущими конструкциями являются все моносоты сразу.

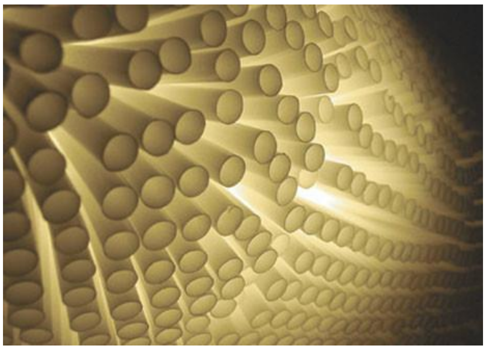
Проект подземного города в пустыне.

Согласно проекту, в будущем, даже пустыня сможет стать вполне обитаемой и самодостаточной в плане воды и продовольствия. Для этого ее необходимо изрешетить чем-то, похожим на пчелиные соты. В этих сотах и будут находиться города будущего со всей их инфраструктурой. Здесь будут жилые кварталы, огороды, парки.

Нанотехнологии



Наноструктуры можно собирать не только из отдельных атомов или одиночных молекул, но молекулярных блоков. Такими блоками или элементами для создания наноструктур являются графен. Графен – это одиночный плоский лист, состоящий из атомов углерода, связанных между собой и образующих решётку, каждая ячейка которой напоминает пчелиную соту. Графит, из чего сделаны грифеля обычных карандашей, представляет собой стопку листов графена.



Производители при создании новых материалов все больше уделяют внимание вопросам экологии и придания материалом уникальных свойств. За свойства материалов отвечают не только химический состав, но и структура материала. Соты это одна из самых интересных структур в природе, которая позволяет добиться разнообразных свойств материалу обладающих схожим химическим составом.

ВЫВОД

Рассматривая в работе формы пчелиных сот и ячеек и геометрические принципы их построения, мы пришли к следующим выводам:

1) Совершенство природы не перестает удивлять человека. А математика – это уникальное средство познания красоты природы.

2) При условии одинаковой площади многоугольников наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Таким образом, только используя данную фигуру в построении сот, пчелы максимально сокращают расходование воска.

3) Шестигранная форма соты – наиболее устойчивая форма в смысле распределения нагрузок, оптимальная природная форма.

4) Пчёлы строят донышки своих ячеек в форме части трёхгранного угла, в качестве граней которого служат ромбы. Общая часть соприкосновения ячеек в улье является ромбом.

5) Объёмы пчелиной ячейки и правильной шестиугольной призмы равны, но у « пчелиной ячейки» - наименьшая площадь поверхности, что выгодно с экономической точки зрения.

6) Пчелиные соты представляют собой пространственный паркет, поскольку они заполняют пространство так, что не остаётся просветов.

7) Принцип «пчелиных сот» широко используется в архитектурных ансамблях всего мира, в строительстве гигантских сооружений, в создании новых дизайн – проектов, в производстве эко-материалов и нанотехнологиях.

Закончить работу хочется словами Пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: « Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию сот».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азевич А.И. Геометрические вариации на пчелиную тему// Математика в школе.- М: Наука, 1998. №21 с. 32-38.

2. Богданов К.Ю. Физик в гостях у биолога М.: Наука,1986.

3. Бялко А. В. Наша планета – Земля. //Библиотечка « Квант» М.: Наука, 1989. вып. 29 с.12-14.

4. Вайскопор В.В. Наука и удивительное. Как человек понимает природу. М.: Наука, 1985.

5. Геометрия.7-9 класс: учебное пособие для общеобразовательных учреждений/ [Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутусов, С.Б. Кадомцев и др.].- М.: Просвещение, 2008.

6. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. М.: Просвещение, 1985.

7. Дубовой Э.И. По следам невидимок. М.: Знание, 1987

8. Еленьский Щ.И. По следам Пифагора. М: Детгиз, 1961.

9. Зельдович Я.Б. Хлопов М.Ю. Драма идей в познании природы.// Библиотечка «Квант», вып. 67, М.: Наука, 1988.

10. Колмогоров А.Л. Паркеты из правильных многоугольников // Библиотечка Квант. М.: Наука, 1976. № 3.

11. Левитин К. Геометрическая рапсодия. М.: Знание, 1976.

12. Популярная энциклопедия « Радость познания». Наука и Вселенная т.1.М.: Мир 1988.

13. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1998.