**Тригонометрические уравнения. Подготовка к ЕГЭ.**

*Алгебра, 11 класс*

**Тип урока**: урок коррекции и систематизации знаний.

 **Цель урока**: закрепить навыки решения тригонометрических уравнений различных типов в процессе подготовки к ЕГЭ.

**Задачи урока.**

 **1. Образовательные:**

 - закрепление программных знаний и умений по решению тригонометрических уравнений; применение свойств тригонометрических функций;

- обобщение и систематизация материала;

- создание условий для контроля и самоконтроля усвоения знаний и умений;

- исторические сведения.

 **2. Воспитательные:**

- воспитание навыков делового общения, активности;

-формирование интереса к математике и ее приложениям.

 **3. Развивающие:**

- формирование умений применять приемы: сравнения, обобщения, выделения главного, переноса знаний в новую ситуацию,

- развитие познавательного интереса, математического кругозора, мышления и речи, внимания и памяти.

**Формы организации работы учащихся на уроке**:

индивидуальная, фронтальная, парная, групповая.

 **Методы обучения**:

 частично-поисковый (эвристический), тестовая проверка уровня знаний, работа по опорным схемам, работа по обобщающей схеме, решение познавательных обобщающих задач, системные обобщения, самопроверка, взаимопроверка.

 **Оборудование и источники информации**: компьютер, мультимедийный проектор, таблицы (плакаты) по теме «Решение тригонометрических уравнений», системно-обобщающая схема; на партах учащихся опорные схемы по решению тригонометрических уравнений, справочные материалы, листы учета знаний, карточки - задания с уравнениями, карточки с домашними заданиями.

**Знания, умения, навыки и качества**, которые актуализируют, приобретут, закрепят, ученики в ходе урока:

* знание методов и этапов решения тригонометрических уравнений;
* умение решать тригонометрические уравнения, выбирая наиболее рациональные методы.

Обоснование возможности использования системно-деятельностного подхода при изучении темы: Содержание изучаемого материала позволяет логически выстроить репродуктивные и творческие учебные ситуации, предполагает использование различных способов действий, в том числе и в области адекватного оценивания учащимися своих действий.

**Ресурсы:**

* Учебники «Алгебра 10» и «Алгебра 11» под редакцией . Г.К.Муравина, О.В. Муравиной. - М.: «Просвещение», 2014-15гг.
* Презентация офисе Microsoft Power Point и для интерактивной доски Smart Board
* Демонстрационный и раздаточный материал
* Интернет сайт: социальная сеть работников образования : nsportal.ru
* [http://www.yandex](http://www.yandex/).

**Структура урока:**

**1 этап** - **мотивационно - ориентировочный**: разъяснение целей учебной деятельности учащихся, мотивация учащихся: выйти на результат.

**2 этап** - **подготовительный:** актуализация опорных знаний, необходимых для решения тригонометрических уравнений – это основные формулы тригонометрии и примеры решения простейших тригонометрических уравнений.

**3 этап** - **основной:** осмысление последовательности выполнения действий согласно правилу (работа с проговариванием правил); совершенствование или коррекция умений учащихся в зависимости от успешности выполнения предыдущего этапа (кто быстро справился – работает с более сложными заданиями; кто испытывал затруднения – продолжает работать с заданиями стандартного уровня); отчёт учащихся о выполнении заданий.

**4 этап – компьютерное тестирование.** Контроль знаний обучающихся через тестирование в тестовой оболочке КРАБ 2

**5 этап**  **- заключительный**: подведение общих итогов, инструкция по выполнению домашнего задания, рефлексия.

**Ход урока**

***Мало иметь хороший ум, главное - хорошо его применять.***

***Рене Декарт.***

**1 этап** - **мотивационно - ориентировочный**

– Доброе утро! Здравствуйте , ребята . Сегодня у нас необычный урок, потому что у нас гости . **«Гости в дому — это к добру!».** Посмотрите друг на друга, улыбнитесь, и пожелайте мысленно  своим друзьям удачи!

 Эпиграфом нашего урока я взяла высказывание великого французского ученого Рене Декарта «Мало иметь хороший ум, главное – хорошо его применять» …

 У вас на столах лежат листы достижений. К концу урока вы их заполните и вернете мне.

Итак, начинаем.

**2 этап** - **подготовительный:** актуализация опорных знаний

Скажите пожалуйста, какие темы мы повторили на последних уроках?

* Определения тригонометрических функций, свойства и графики
* Основное тригонометрическое тождество
* Формулы приведения
* Формулы сложения
* Формулы двойного угла
* Формулы понижения степени (формулы половинного угла)
* Тригонометрические выражения, тождества и уравнения

Коль собираемся говорить о тригонометрии, как вы думаете, какова цель нашего урока? Сформулируйте её.

Действительно, сегодня у нас урок закрепления навыков решения тригонометрических уравнений различных типов в процессе подготовки к ЕГЭ. Мы повторим, обобщим и приведем в систему изученные виды, типы, методы и приемы решения тригонометрических уравнений. Надо сказать, что именно тригонометрические задания вызывают затруднения при сдаче экзаменов. Будем работать и вместе, и индивидуально.

***«Сегодня мы учимся вместе: я, ваш учитель, и вы, мои ученики. Но в будущем ученик должен превзойти учителя, иначе в науке не будет прогресса»,*** - сказал Василий Александрович Сухомлинский, советский педагог.

**Вопросы для учащихся:**

1) Какие уравнения называют тригонометрическими? - Уравнения, в которых переменная стоит под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.

2 Приведите примеры простейших тригонометрических уравнений? - cos x = a; sin x = a; tg x = a; ctg x = a

3 Сколько корней может иметь тригонометрическое уравнение? - Зависит от а: может не иметь корней, может иметь множество корней в силу периодичности тригонометрических функций.

4 Что значит решить тригонометрическое уравнение? - Найти множество корней или убедиться, что корней нет

5 В уравнениях cos x = a; sin x = a оцените число а? Если а<-1 и а>1, то нет корней.

6. Решите простейшие тригонометрические уравнения

|  |  |
| --- | --- |
| $$cosx=a$$ | при $а\in \left[-1;1\right]$ $x=\pm \arccos(a)+2πn,n\in Z$ |
| $$sinx=a$$ | при $а\in \left[-1;1\right]$ $x=\left(-1\right)^{n}\arcsin(a)+πn,n\in Z$ |
| $$tgx=a$$ | $x=arctga+πn,n\in Z$ |
| $$ctgx=a$$ | $x=arcctga+πn,n\in Z$ |

Напомните типы тригонометрических уравнений и методы их решения

* Уравнения, сводящиеся к квадратным a sin2 x + b sin x + c = 0
* Однородные уравнения а sin x +b cos x = 0

a sin2 x + b cos2x +c sin x cos x = 0

* Уравнения, решаемые разложением левой части на множители а(х)$∙$ b(x) =0
* Уравнения вида а sin x +b cos x = с

**3 этап** - **основной**

**Задание 1. Решите уравнение 8 cos4x +3 sin2x = 8**

Решение.

1. Определите тип уравнения
2. Наметьте план решения
3. Введите соответствующую замену переменной
4. Найдите область допустимых значений введенной переменной
5. Решите полученные простейшие уравнения
6. Запишите верно ответ

Учитывая, что из основного тригонометрического тождества sin2x = 1- cos2x, получим

8 cos4x +3 (1-сos2x) = 8

8 cos4x -3 сos2x - 5 = 0

Исходное уравнение свелось к квадратному относительно сos2x

Пусть сos2x = t, при условии $t\in \left[0;1\right]$, тогда 8t2-3t-5=0,

откуда t1=1, t2= -5/8- не удовл.усл. t

cos2 x =1, cos x =$\pm 1$, x=$πn$, $n\in Z$

Ответ. x=$πn$, $n\in Z$

**Важнейшая задача цивилизации –**

**научить человека мыслить**

Томас Эдисон

**Задание 2. Решите уравнение cos *x* – sin *x*=1.**

Решение.

**1 способ. Преобразование разности в произведение.**

 ***cos x – sin x = 1***

$$\sin((\frac{π}{2})-x)-sin⁡ x=1$$

$$2cos\frac{\frac{π}{2}-x+x}{2} sin\frac{\frac{π}{2}-x-x}{2}=1$$

$$2 cos\frac{π}{4}\sin(\left(\frac{π}{4}-x\right))=1$$

$$\sqrt{2} \sin(\left(\frac{π}{4}-x\right))=1$$

$$\sin(\left(\frac{π}{4}-x\right))=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{ π}{ 4}-x=\frac{π}{4}+2πn, n\in Z$$\frac{π}{4}-x=π-\frac{π}{4}+2πn, n\in Z$

$x=2πn, n\in Z$$x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

*Ответ.* $x=2πn,$$x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

**2 способ.**  **Введение вспомогательного угла**

 ***cos x – sin x=1,*** $\sqrt{1^{2}+(-1)^{2}}=\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x-\frac{1}{\sqrt{2}})\sin(x=\frac{1}{\sqrt{2}})$

Введем вспомогательный угол $φ$ такой, что $\cos(φ\cos(x-\sin(φ\sin(x=\frac{1}{\sqrt{2}}))))$

Откуда $\cos(φ=)\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(φ=)\frac{1}{\sqrt{2}} $ Значит, $φ=\frac{π}{4}$

Получим $\cos(\left(φ+x\right)=)\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{π}{4}+x=\pm \frac{π}{4}+2πn, n\in Z$ $x=\pm \frac{π}{4}-\frac{π}{4}+2πn, n\in Z$

$x=2πn,$ $x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

Ответ. $x=2πn,$ $x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

**3 способ. Использование формул двойного угла**.

 ***cos x – sin x=1***

$\cos(2∙\frac{x}{2})-\sin(2∙\frac{x}{2})=cos^{2}\frac{x}{2}- sin^{2}\frac{x}{2}$

$$cos^{2}\frac{x}{2}-sin^{2}\frac{x}{2}-2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})=cos^{2}\frac{x}{2}- sin^{2}\frac{x}{2}$$

$$-2sin^{2}\frac{x}{2}-2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})=0$$

$$-2sin\frac{x}{2}(\sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{2}))=0$$

$$sin\frac{x}{2}=0 или \sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{2})=0$$

$$\frac{x}{2}=πn, n\in Z tg\frac{x}{2}+1=0$$

$tg\frac{x}{2}=-1$

$$\frac{x}{2}=-\frac{π}{4}+πn, n\in Z$$

$x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

Ответ. $x=2πn,$ $x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

**4 способ. С учетом множества значений функций**

 ***cos x – sin x = 1 0 1***

Разность косинуса и синуса одного угла может быть равна 1, если

а) $\left\{\begin{array}{c}\cos(x=1)\\\sin(x=0)\end{array}\right.$ и б) $\left\{\begin{array}{c}\cos(x=0)\\\sin(x=-1)\end{array}\right.$ ***-1***

Откуда получим $x=2πn,$ $x=-\frac{π}{2}+2πn, n\in Z$

**Задание 3. Решите уравнение cos *x* + sin *x* = 7.**

Решение.

Учитывая множество значений функций y=cos x и y=sin x, которыми являются отрезки $\left[-1;1\right]$ , сумма не может быть равна 7. Поэтому, уравнение корней не имеет.

Ответ. Корней нет.

Тригонометрические выражения, уравнения и отбор корней присутствуют в заданиях ЕГЭ по математике базового и профильного уровней.

**Задание 4. (базовый уровень ЕГЭ)**

**Найдите значение выражения** $\frac{59}{cos^{2}14°+cos^{2}104°}$

Решение. $\begin{array}{c}\\\frac{59}{cos^{2}14°+cos^{2}104°}=\frac{59}{cos^{2}14°+cos^{2}\left(90°+14°\right)}=\frac{59}{cos^{2}14°+sin^{2}14°}=\frac{59}{1}=59\end{array}$

Ответ. 59.

**4 этап - Компьютерное тестирование.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **N** | **Задание** | **Вариант ответа** |
| **1** | **2** | **3** | **4** |
| 1 | Вычислить cos 600 | $$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$\frac{1}{2}$$ | 1 |
| 2 | Вычислить sin 1200 | $$-\frac{1}{2}$$ | $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | $$\frac{1}{2}$$ |
| 3 | Вычислить $tg\frac{π}{4}$ | 0 | 1 | $$\frac{1}{2}$$ | $$\sqrt{3}$$ |
| 4 | Решить уравнение cos x= -1 | *2Пп* | *П+2Пп* | *0* | $$\frac{π}{2}+2πn$$ |
| 5 | Решить уравнение sin x = 1 | *2Пп* | *Пп* | $$\frac{π}{2}+πn$$ | $$\frac{π}{2}+2πn$$ |
| 6 | Решить уравнение cos x=0 | $$\frac{π}{2}$$ | *П* | *2П* | $$\frac{π}{4}$$ |
| 7 | Решить уравнение tg x=1 | *600* | *900* | *450* | *1800* |
| 8 | Упростите выражение $sin⁡(π+α)$ | $$-sin∝$$ | $$sin∝$$ | $$-cosα$$ | $$cosα$$ |
| 9 | Упростите выражение $\cos((\frac{3π}{2})-α)$ | $$-cosα$$ | $$cosα$$ | $$sin∝$$ | $$-sin∝$$ |
| 10 | Упростите выражение $\sin((\frac{π}{2})+α)$ | $$sin∝$$ | $$-sin∝$$ | $$cosα$$ | $$-cosα$$ |

***Исторический материал*** (сообщение о Леонарде Эйлере, крупнейшем математике 18-го столетия)

**Задание 5.** **(профильный уровень ЕГЭ)**

ЕГЭ. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся, стр.79, 5. Задачи повышенной сложности

 **5.1.13. а) Решите уравнение** $log\_{4}\left(sinx+sin2x+16\right)=2$

 **б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-4π;-\frac{5π}{2}\right]$

* Определите тип уравнения
* Наметьте план решения
* Выберите подходящий способ отбора корней тригонометрического уравнения:

- с помощью оси ОХ,

- с помощью единичной окружности,

- с помощью двойного неравенства,

- с помощью последовательного перебора целых значений ***n***

а) **Решите уравнение** $log\_{4}\left(sinx+sin2x+16\right)=2$

Решение.

$$log\_{4}\left(sinx+sin2x+16\right)=2$$

$$log\_{4}\left(sinx+sin2x+16\right)=log\_{4}16$$

Решением данного уравнения является решение системы, состоящей из области определения логарифмической функции и решения тригонометрического уравнения.

$$\left\{\begin{array}{c}sinx+sin2x+16>0,\\sinx+sin2x+16=16\end{array}\right.$$

1)$ sinx+sin2x+16>0$

Учитывая множество значений функций y= sin x и y=sin 2x, которыми являются отрезки $\left[-1;1\right]$ , сумма может быть в промежутке (-2;2), а множество значений функции $y=sinx+sin2x+16$ заключено в промежутке (14; 18). Поэтому, неравенство $sinx+sin2x+16>0$ выполняется при любых значениях *х.* Значит, $x\in R$

 



2)$ sinx+sin2x+16=16$

$$ sinx+2 sinx cosx=0$$

$$sinx(1+2 cosx)=0$$

$$sinx=0 или 1+2 cosx=0$$

$x=πn, n\in Z $$cosx=-\frac{1}{2}$

$x=\pm \left(π-\frac{π}{3}\right)+2πn, n\in Z$

$x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z$

Таким образом, получаем систему$\left\{\begin{array}{c}x\in R\\x=πn, x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z \end{array}\right.$

Значит, решением уравнения является $x=πn, x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z$

**б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $\left[-4π;-\frac{5π}{2}\right]$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | x |

 -4П -3П $-\frac{5П}{2}$ -2П - П $\frac{-2П}{3} $ 0 $ \frac{2П}{3} $ П

 у

 1

 - 3П 0 -4П х

$$-\frac{5П}{2}$$

Ответ. а) $x=πn, x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z$ б) $х\_{1}=-4π, х\_{2}=-\frac{10π}{3}, х\_{3}=-3π, х\_{4}=-\frac{8π}{3}. $

**Задание 6**. **При каких значениях *а*  уравнение** $sin^{4}x+cos^{4}x=a$ **имеет корни. Найдите эти корни.**

Решение. (*продемонстрировать на слайде, используя опцию «шторка»)*

$$sin^{4}x+cos^{4}x=a$$

Преобразуем правую часть уравнения $(sin^{2}x+cos^{2}x)^{2}-2sin^{2}x cos^{2}x=a$

$1-\frac{1}{2}sin^{2}2x=a$ $sin^{2}2x=2-2a$

Полученное уравнение имеет корни, если $0\leq 2-2a\leq 1$, откуда $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$

Таким образом, при $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$ исходное уравнение имеет корни.

$$sin2x=\pm \sqrt{2-2a}$$

$sin2x=-\sqrt{2-2a } sin2x=\sqrt{2-2a}$

$2x=(-1)^{n+1}arcsin\sqrt{2-2a}+πn, n\in Z$$2x=(-1)^{n}arcsin\sqrt{2-2a}+πn, n\in Z$

*или* $2x=\pm arcsin\sqrt{2-2a}+πn, n\in Z$

$x=\pm \frac{1}{2}arcsin\sqrt{2-2a}+\frac{πn}{2}, n\in Z$

Ответ. При $\frac{1}{2}\leq a\leq 1$ уравнение имеет корни $ x=\pm \frac{1}{2}arcsin\sqrt{2-2a}+\frac{πn}{2}, n\in Z$

**5 этап**  **- заключительный**

**Информация о домашнем задании и инструктаж о её выполнении.**

1) по учебнику:

2) ЕГЭ. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся, стр.79

3) подготовиться к тестовой работе по теме «Тригонометрия»

**Итог урока.**

Вывод:

- обобщили знания и отработали навыки решения тригонометрических уравнений различными способами, провели подготовку к ЕГЭ;

- развили чувство самостоятельности и ответственности за качество своих знаний;

- развили навыки самоконтроля, умений анализировать, составлять план или алгоритм учебных действий.

Оценивание:

- За работу у доски

- За активное участие на уроке

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **N** | **Этапы урока** | **Оценка работы** |
| 1 | Повторение ранее изученного |  |
|   | \*Знание формул, правил  |  |
|   | \*Применение формул и правил на практике |  |
| 2 | Закрепление ранее изученного материала |  |
|   |  \*Преобразование выражений |  |
|   |  \*Решение уравнений |  |
|   |  \* Отбор корней |  |
| 3 | Тестирование (компьютерное) |  |
|   | Оценка за работу на уроке |  |

**Рефлексия**

 Выразите свое отношение к уроку. Постройте на листах контроля график функции y=cosx и поставьте смайлик в том месте графика, которое отражает ваши ощущения на уроке: чувствовали ли вы себя на гребне волны или же, наоборот, в самой нижней точке.

Предлагаю закончить урок словами чешского педагога Яна Амоса Коменского: «Считай несчастным тот день и тот час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию».

Спасибо за хорошую работу на уроке. До свидания.