***Элективный курс по математике***

***«Метод математической индукции***

***при решении задач»***

**Рецензия**

**на программу элективного курса по математике**

**«Метод математической индукции при решении задач».**

Программа составлена учителем математикиМОУ «Лямбирская средняя общеобразовательная школа №1»**Фетхулловой Эльвирой Абуевной.**

Программа элективного курса «Метод математической индукции при решении задач» направлена на подготовку учащихся к предметной олимпиаде, углублению школьного курса математики, развитию методов и способов математического исследования.

Считаем, что составленная программа элективного курса соответствует всем требованиям и заслуживает награждения **Дипломом II степени**.

Программа отправляется для участия в **Республиканском конкурсе «Новое образование».**

**Рецензенты:**

**Маринова Р.И.**, учитель математики

МОУ «Лямбирская СОШ №2»

**Минеева Д.С.**, учитель математики

МОУ «Атемарская СОШ »

***Пояснительная записка***

Реализация элективных курсов преследует своей целью подготовку учащихся к ситуациям выбора направления дальнейшего образования. Элективные курсы в школе являются пропедевтическими и выполняют задачи практико - ориентированной помощи в приобретении личностного опыта выбора собственного содержания образования.

*Цели и категории учащихся.* Курс предназначен для подготовки учащихся 9-11 класса с ориентацией на естественно- математический профиль и подготовки учащихся к математическим олимпиадам. Содержание учебного материала программы соответствует целям элективного курса и обладает новизной для учащихся.

*Актуальность курса* определяется тем, что учащиеся должны разбираться в тех или иных способах доказательств тождеств, равенств и неравенств

*Общие принципы отбора содержания материала курса:*

- системность;

- целостность;

- объективность;

- научность;

- доступность для учащихся;

- реалистичность с точки зрения возможности усвоения основного содержания курса за 8 – 11 часов.

*Полнота содержания -* курс содержит все сведения, необходимые для достижения запланированных целей обучения.

*Инвариантность содержания -* курс применим для разных групп школьников, что достигается обобщенностью включенных в неё знаний, их отбором в соответствии с задачами предпрофильного обучения.

*Практическая направленность содержания -* содержание курса обеспечивает приобретение знаний и умений, необходимых для доказательства алгебраических равенств и неравенств при любом целом или натуральном значениях неизвестной, для доказательства делимости алгебраических выражений на натуральное число.

*Систематичность содержания* обеспечивается логикой развёртывания учебного содержания.

*Реалистичность программы* выражается в том, что она может быть изучена за 8 – 11 часов в течение любого времени.

*Место курса в системе школьного математического образования.*

Предлагается элективный курс в объеме 8 – 11 часов, который включается либо в конце учебного года , либо в течение года на факультативных или групповых занятиях, при подготовке к математическим олимпиадам

Данный образовательный курс является источником знаний, который расширяет и углубляет базовый компонент.

Значимость, роль и место данного курса определяется также необходимостью подготовки учащихся к сдачи ЕГЭ и выбору профессиональной деятельности.

По замыслу автора, этот курс позволит полнее учесть интересы и профессиональные намерения старшеклассников, следовательно, сделать обучение более интересным для учащихся и, соответственно, получить более высокие результаты.

***Цели и задачи курса.***

***Воспитательные****:* воспитывать любовь к предмету, чувство товарищеской взаимопомощи;

***Образовательные:*** расширить, закрепить и систематизировать знания учащихся по изучению темы « Метод математической индукции» в процессе решения задач на доказательство, выяснения вопросов делимости выражений на натуральные и целые числа.

***Развивающие****:* развить и выработать прочные умения и навыки использования изученного материала ; развитие речи, мышления и способности наблюдать и делать выводы, составлять алгоритм решения задач на доказательства.

***Предполагаемые результаты изучения курса.***

Предлагаемый курс по математике должен помочь учащимся усвоить основные ( базовые ) математические понятия, способы решения задач олимпиадного уровня, расширить базовый компонент.

***Уровень обязательной подготовки определяется следующими***

***требованиями:***

*-* знать и уметь правильно употреблять термины, связанные с понятием индукции;

*-* уметь понимать смысл условий задач;

*-* уметь представлять алгоритм применения метода математической индукции

-знать и уметь правильно переходить от одного шага алгоритма к другому шагу

- уметь пользоваться техникой доказательства тождеств, равенств и неравенств при заданных значениях неизвестной;

-уметь пользоваться простейшими приёмами применения метода математической индукции;

-уметь пользоваться справочным материалом для нахождения нужных формул и их использование при решении задач.

***Методы преподавания курса***.

Методы преподавания определяются целями и задачами данного курса, направленного на формирование способностей учащихся.

Учащиеся овладевают математическими понятиями, способами математического исследования.

Важнейшим принципом методики изучения курса является постановка вопросов и заданий, позволяющих учителю и учащимся проверить уровень усвоения основных дидактических единиц и степень сформированности умений, приобретённых в процессе изучения курса. Это различные виды тестовых заданий и задания творческого характера.

***Тематическое планирование*** ***элективного курса***

***по математике*** ***«Метод математической индукции*** ***в решениях задач»***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***Содержание обучения (название темы)*** | ***колич часов*** | ***Тип занятия*** |
| **1** | Понятие метода математической индукции. Полная и неполная индукции. | 2 | 1- лекция  1-практика |
| **2** | Задачи на делимости. | 2 | 1-лекция  1-практика |
| **3** | Задачи на доказательство равенств | 3 | 1-лекция  2-практика |
| **4** | Задачи на доказательство неравенств | 3 | 1-лекция  2-практика |
| **5** | Итоговое занятие | 1 | практика |

Всего: 11

***Методическое обеспечение***

1. ***Алимов Ш.А****.* Алгебра и начала анализа ,10-11 класс.

М., «Просвещение»,2002 г.

1. ***Виленкин Н.Я****.* Алгебра и математический анализ, 10 класс.

М., «Просвещение», 1999г.

1. ***Галицкий М.Л.*** Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. М., «Просвещение»,1999 г
2. ***Карп А.П.*** Сборник задач по алгебре и началам анализа, 10-11 класс.

М., «Просвещение»,1998 г

1. ***Крамор В.С****.* Повторяем и систематизируем школьный курс

алгебры и начал анализа. М. «Просвещение»,1997 г

1. ***Шарыгин И.В****.* Факультативный курс по математике. Решение задач.

М., «Просвещение»,1997г.

***Содержание курса.***

Математикой занимаются не только профессионалы.

Эта наука всегда притягивала внимание многих любителей. И иногда любопытство людей, обращавшихся к математике в часы досуга, не уступали любопытству профессиональных учёных.

Иногда некоторого рода наблюдения могут приводить к замечательным открытиям. Вот что пишет по поводу наблюдений великий мастер индукции (от лат***. inductio*** – наведение) , один из крупнейших математиков XVIII века Леонард Эйлер (1707 – 1783) : «…в теории чисел , которая всё ещё не совершенна, наши самые большие надежды мы можем возлагать на наблюдения; они непрерывно будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать. Этот вид знания, которое подкрепляется только наблюдениями и всё ещё не доказано, следует тщательно отличать от истины; оно, как мы обычно говорим, приобретается ***индукцией***… мы должны пользоваться таким открытием как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы можем научиться кое – чему полезному.»

Индукция есть метод получения общего утверждения из частных наблюдений, например, любой человек наблюдает смену ночи утром, утра днём и т.д. на основе этих наблюдений он делает вывод о смене времени суток как общей закономерности . Вывод этот верен . Аналогично можно сделать вывод о смене времён года.

Рассмотрим целые числа, определяемые формулой f(x)=x2+x+41. будем придавать х значения 0,1,2,3,….. .

Тогда f(0)=41, f(1)=43, f(2)=47, f(3)=53, f(4)=61, …

Из этих наблюдений можно сделать вывод, что формула f(x)=х2+х+41 даёт только простые числа. Утверждение это ошибочно. При х=40 получаем f(40)=402+40+41 - число составное, равное 1681=412

Или ещё один похожий пример.

Рассмотрим многочлен g(x)=n2 - n+41 и начнём придавать аргументу n значения, равные 1,2,3,4,5,… . В результате будем иметь g(1)=41, g (2)=43, g(3)=47, g (4)=53, g (5)=61,…

Каждое из полученных решений представляет собой простое число. Отсюда можно предположить, что при любом натуральном n значение многочлена g(n) есть простое число. Эта гипотеза выдерживает испытание для всех n от 1 до 40. Но уже g(41)=412-составное число. Таким образом, наше предположение неверно.

От такого рода ошибок предостерегал Эйлер: « Однако мы видели случаи, когда простая индукция вела к ошибке. Поэтому мы должны проявлять большую осторожность, чтобы не принять за истинные такие свойства чисел, которые мы открывали путём наблюдения и которые подкрепляются одной лишь индукцией». Такую индукцию часто называют ***неполной.***

Как указывал Эйлер, этот метод хорош лишь для того, чтобы угадать результат, который в дальнейшем надо строго доказать. И не всегда математикам удавалось найти нужное доказательство. А иногда его просто нет, как в рассмотренных нами примерах.

В случае, когда математическое утверждение касается конечного числа объектов, его можно доказать, проверяя для каждого объекта. Например, утверждение «каждое двузначное четное число является суммой двух простых чисел» следует из серии равенств:

10=5+5 12=5+7 14=7+7 16=5+11 18=5+13 20=7+13

22=11+11 24=11+13 26=13+13 28=5+23 30=7+23

……………………………………………………………….

90=7+83 92=3+89 94=5+89 96=7+89 98=19+79.

Метод доказательства, при котором проверяется утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют **полной индукцией**.

Этот метод применим сравнительно редко, поскольку математические утверждения касаются, как правило, не конечных, а бесконечных множеств объектов. Например, доказанное выше полной индукцией утверждение о четных двузначных числах является лишь частным случаем теоремы: «Любое четное число является суммой двух простых чисел». Эта теорема до сих пор ни доказана, ни опровергнута.

В естественных науках ( физике, химии, биологии) применяют неполную индукцию: проведя эксперимент несколько раз, переносят полученные результаты на все случаи. Однако, если бы мы даже проверили утверждение о разложимости четного числа в сумму двух простых чисел для первого миллиарда четных чисел (это можно сделать с помощью ЭВМ), полученный результат лишь укрепил бы нашу уверенность в справедливости теоремы, но ни на шаг не приблизил бы нас к её доказательству. Ведь в утверждении речь идёт о справедливости утверждения для всех четных чисел, а таких чисел бесконечно много.

Чтобы избежать подобного рода ошибок, необходимо справедливость утверждения доказать методом, основанным на принципе ( аксиоме ) математической индукции. Метод доказательства, основанный на применении принципа математической индукции, носит название метода математической индукции. Термин « математическая индукция» появился впервые в 1838 году в одноимённой статье де Моргана в Британской энциклопедии. Этот метод впервые был разработан в 1665 году Б. Паскалем. Сейчас он широко применяется в математике для доказательства самых разнообразных тождеств, неравенств и других утверждений.

**Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:**

**1) Начало индукции. Доказывают или непосредственно проверяют справедливость утверждения ( формулы ) для n=1;**

**2) Индуктивный переход. Предполагают справедливость утверждения для некоторого натурального n=k . Исходя из этого предположения, доказывают справедливость утверждения для n=k+1.**

Ясно, что метод математической индукции (в дальнейшем м.м.и.) можно применять только для доказательства утверждений , зависящих от натурального n.

Задачи на делимость натуральных чисел часто предлагаются на математических олимпиадах разного уровня. Многие из них легко доказываются м.м.и.

**Задача 1.**

**Доказать , что при любом натуральном n число**

**32n+1+2n+2 делится на 7.**

Доказательство:

Обозначим an=32n+1+2n+2.

1) Начало индукции.

Если n=1 , то a1=35 делится на 7.

(впрочем, здесь начать можно и с n=0)

2) Индуктивный переход.

Пусть ak делится на 7. ( предположение индукции)

Докажем справедливость утверждения для n=k+1 ak+1=32(k+1)+1+2(k+1)+2=32k+1 9+ 2k+2 2= (32k+1+2k+2)9-7 \*2k+2=9ak-7\*2k+2

Последнее число делится на 7 , т.к. представляет собой разность двух целых чисел, делящихся на 7.

**Задача 2.**

**Доказать, что число 7n+1+82n-1 делится на 19.**

Доказательство:

1) если n=1 , то 72+81+57, а 57 делится на 19.

2) предположим, что утверждение верно при некотором натуральном n=k , т.е. число 7k+1+82k-1 делится на 19.

Докажем верность утверждения для n=k+1

7(k+1)+1+82(k+1)-1=7k+2+82k+1=7\*7k+1+64\*82k-1=7(7k+1+82k-1)+57\*82k-1.

Так как каждое слагаемое полученной суммы делится на 19, то и 7k+2+82k+1 также делится на 19. Утверждение доказано.

**Задача 3.**

**Доказать, что при любом натуральном n число 23+1 делится на 3n+1**

Доказательство:

1) Для n=1 число 23+1=9 делится на 31+1=9

2) Пусть утверждение верно для n=k , т.е. 23+1 делится на 3k+1. Перейдём к n=k+1 :

23+1=23+1=(23)3+1=(23+1)((23)2 – 23+1)

Первый множитель в этом произведении делится на 3k+1 по предположению. Осталось показать делимость второго множителя на 3. В самом деле, (23)2 - 23+1=(23+1)2 - 3\*23 ; Эта разность , очевидно, делится на 3 , поскольку делимость на 3 уменьшаемого вытекает из предположения. Итак, число 23+1 делится на 3k+2. Следовательно, задача доказана.

**Задача 4.**

**Вывести формулу суммы первых n нечетных чисел натурального ряда.**

Решение.

S(1)=1, S(2)=1+3=4, S(3)=1+3+5=9, S(4)=1+3+5+7=16, S(5)=….=25,

Замечаем, что сумма первых n нечётных чисел натурального ряда равна n2 т.е. S(n)=n2. Докажем это м.м.и.

1) для n =1 формула верна.

2) предположим, что она верна для какого-нибудь натурального n=k , т.е. S(k)= k2.

Докажем , что тогда она будет верна и для n=k+1, т.е. S(k+1)=(k+1)2

S(k+1)=1+3+5+…+(2k-1)+(2k+1)=S(k)+(2k+1)=k2+2k+1=(k+1)2.

Следовательно, формула верна для всех натуральных значений n , т.е. S(n)=n2

**Задача 5.**

**Доказать, что сумма квадратов первых натуральных чисел равна**

**12 +22 +32 +42 +…+n2=**

Доказательство:

1) Проверим справедливость утверждения для n =1.

При n =1 сумма состоит из одного члена, т.е. S(1) =1 ,

и по формуле имеем S(1)= ,

т.е. для n =1 формула верна.

2) Предположим справедливость формулы для n=k ,т.е.

S(k)=12+22+32+…+k2 =

Исходя из этого предположения докажем справедливость формулы для n=k+1

Действительно, S(k+1)=12+22+32+…+k2+(k+1)2.

Сумма первых k слагаемых равна S(k)=

Значит, S(k+1)=S(k)+ (k+1)2=

=

Итак, мы доказали, что формула верна для n=k+1 . Мы получили ту же формулу. Следовательно, в силу м.м.и. данная формула верна для любого натурального n.

**Задача 6.**

**Доказать, что для всех натуральных n справедлива формула**

**13+23+33+…+n3= **

Доказательство:

1) при n =1 левая часть этой формулы принимает вид 13=1 ; правая часть принимает вид  . Значит, при n =1 формула верна.

2) предположим, что формула верна при n=k , т.е. верно равенство

13+23+33+…+k3 =

Докажем, что тогда эта формула верна и при n=k+1 (каким бы ни было k ), т.е. верно равенство 13+23+…+k3+(k+1)3=

Для этого заметим, что левую часть доказываемого равенства можно записать в виде (13+23+33+…+k3)+(k+1)3

Но по предположению выражение в скобках равно  ,

и поэтому

13+23+…+k3+(k+1)3= .

Значит, доказываемая формула верна при n =1, а из её справедливости при n=k вытекает , что она верна и при n=k+1 . В силу м.м.и. отсюда вытекает справедливость этой формулы для всех натуральных значений n.

**Задача 7**

**Докажите следующее утверждение.**

**Сумма внутренних углов произвольного (не обязательно выпуклого) n- угольника равна **

Доказательство:

1) Для n =3 утверждение известно.

2) Пусть оно верно для n=k и докажем его для n=k+1

В любом ( n +1)-угольнике найдутся хотя бы две смежные стороны, образующие угол, меньший развёрнутого. Проведём диагональ через концы этих сторон. В результате ( k +1)-угольник разобьётся на треугольник и k-угольник. Сумма углов ( k +1)-угольника равна .

Утверждение доказано.

**Задача 8.**

**Доказать, что при всех натуральных n выполняется неравенство**

****

Доказательство:

Обозначим левую часть неравенства через an .

1) начало индукции.

Справедливость неравенства при n=1 очевидна.

2) индуктивный переход. Пусть ak . Надо доказать, что  ak+1.

А поскольку ak+1= ,

то нам достаточно доказать неравенство  .

Возведя это неравенство в квадрат и упрощая, приходим к неравенству n.

**Задача 9.**

**Доказать неравенство Бернулли.**

Теорема. Если х > - 1 , то для всех натуральных значений n выполняется неравенство  (1)

Доказательство:

1) при n =1 доказываемое неравенство принимает вид 1+х1+х

и , очевидно, справедливо.

2)предположим, что оно верно при n=k , т.е. что

 (2)

так как по условию х >-1 , то 1+х > 0 ,

и поэтому неравенство (2) не изменит смысла при умножении обеих его частей на 1+х

 (3)

Так как  , то из (3) получаем, что 

Итак, неравенство (1) верно при n =1 ,а из его истинности при n=k следует , что оно истинно и при n=k+1 .

Значит, в силу м.м.и. оно имеет место для всех n  **N**

Например, из (1) следует, что

1,005200=(1+0,005)2001+200\*0,005=2

0,99410=(1-0,006)101-10\*0,006=0,94

**Задача 10.**

**Доказать, что модуль суммы n чисел не превосходит суммы модулей этих чисел: **

Доказательство:

1) при n =1 

при n =2 получаем известное неравенство  , справедливое для любых а1 и а2

2) пусть k - некоторое натуральное число.

Докажем, что если неравенство справедливо для любых k слагаемых, то оно справедливо и в случае, когда число слагаемых равно k+1.

Пусть a1, a2 , a3 ,…, ak , ak+1 - произвольные числа. Имеем



*.*

Неравенство доказано.

***Подборка заданий***

***для самостоятельного решения.***

**1. Задачи на делимости.**

Докажите, что при всех натуральных n

1) n3+11n кратно 6

2) 7n+3n-1 кратно 9

3) 5n-3n+2n кратно 4

4) 62n+19n-2n+1 кратно17

5) 5\*23n-2+33n-1 кратно 19

6) 22n-1-9n2+21n-14 кратно 27

7) 11n+2+122n+1 делится на 133

8) 18n-1 делится на 17

9) 33n+2+7n делится на 10

10) 7\* 52n+12\*6n делится на 19

**2. Доказать равенства для всех натуральных n**

1) 1+4+9+25+…+n2=

2) 2+4+6+…+2n=n(n+1)

3) 2+6+10+…+2(2n-1)=2n2

4) 2+10+24+…+(3n2-n)=n2(n+1)

5) 1\*2+2\*5+3\*8+…+n(3n-1)=n2(n+1)

6) 2+16+56+…+(3n-2)\*2n=10+(3n-5)\*2n+1

7) 5+45+325+…+(4n+1)\*5n-1=n\*5n

8) 12+32+52+…+(2n-1)2=

9) 13+23+…+n3=

10) 1\*2\*3+2\*3\*4+3\*4\*5+…+n(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)(n+3)

11) 

12) 

13) 

14) 

15) 

16) 

17) 

18) 

19) 

**3. Докажите справедливость неравенства при любом натуральном значении n**

1) 2n >n

2) 2n >2n+1

3) 3n >5n+1 при n

4) 5n> 7n-3

5) 2n-1>n(n+1) при n

6) 3n 

7) 4n

8) 4n>3n+2n при n

9) 2n >n3 при n10

10) 3n >n2

11)  , если 

12)  при 

13) 

14) 

15)  если а, в - положительные числа

16)  при n>3

***Словарь***

**Алгебраические выражения –** выражения, содержащие буквы, числа, скобки и знаки арифметических действий

**Гольдбах Христиан –** немецкий математик XVIII в., член Петербургской Академии наук

**Индукция –** метод получения общего утверждения из частных наблюдений

**- полная –** индукция, в которой проверяется утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности

**- неполная –** индукция, в которой свойства чисел вытекают из частных наблюдений

**Математика –** наука о качественных и количественных изменениях окружающего мира. В переводе с греческого – учусь через размышление

**Метод математической индукции –** метод доказательства, основанный на применении принципа математической индукции

**Натуральный ряд –** числовая последовательность, элементами которой являются натуральные числа

**Блез Паскаль –** французский ученый математик XVII в.

**Де Морган –** британский математик XIX в.

**Эйлер Леонард –** немецкий математик XVIII в.