**ФГБОУ ВПО «МГПИ им.М.Е.Евсевьева»**

**Всероссийская конференция с международным участием**

**«Юный исследователь»**

**Исследование алгоритма Евклида**

**для нахождения НОД**

**Автор работы:**

**Аржанова Дарья, ученица 6А класса МОУ «Лямбирская средняя общеобразовательная школа №1» Лямбирского района РМ**

**Руководитель работы:**

**Фетхуллова Эльвира Абуевна, учитель математики высшей квалификационной категории**

**Саранск, 2018 г.**

**Информационная страница**

Директор школы: *Мензуллин Юнир Бясырович*

Почтовый адрес школы: *431510, Республика Мордовия, Лямбирский муниципальный район, село Лямбирь, улица Ленина, дом 4.*

Телефон школы: *8-314-2-12-65*

Автор работы: *Аржанова Дарья Павловна*

Почтовый адрес: *431510, Республика Мордовия, Лямбирский муниципальный район, село Лямбирь, улица Г.Тукая, дом 9.*

Телефон  *8-927-184-22-54*

Руководитель работы: *Фетхуллова Эльвира Абуевна, МОУ «Лямбирская средняя общеобразовательная школа №1», учитель математики.*

**Аннотация.**

Ученица выбрала для своей работы очень интересную тему. Очень важно, что на выбор темы её подтолкнули наблюдения, на которые не каждый может обратить внимание.

Ученица прочитала дополнительную научную и занимательную литературу, провела исследования, которые помогли сделать ей очень важные выводы. И найти новый способ нахождения наибольшего общего делителя натуральных чисел. Ею проведена очень большая и трудная исследовательская работа. Очень важно, что выводы она сделала не голословные, а на основании проделанной работы.

Учитель математики:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Фетхуллова Э.А./

**Содержание.**

* Введение…………………………………………………………………………..5
* Основная часть……………………………………………………………………7

1. Основные понятия…………………………………………………………….7
2. Краткая биография Евклида………………………………………………….9
3. Алгоритм Евклида…………………………………………………………….12

* Заключение………………………………………………………………………..13
* Терминологический словарь……………………………………………………..14
* Список литературы……………………………………………………………….15
* Приложение…………………………………………………………………….....16

**Введение**

**Актуальность проблемы.**

В этом году в школьном курсе математики мы начали изучение темы нахождение наибольшего общего делителя натуральных чисел. На уроках мы рассмотрели универсальный способ нахождения НОД чисел способом разложения их на простые множители. Но мне стало очень интересно, а как же найти НОД чисел, если их нельзя разложить на простые множители, используя изученные нами признаки делимости чисел.

Перечитывая литературу и изучая Интернет- ресурсы, я натолкнулась на новый, очень, на мой взгляд, интересный способ нахождения НОД натуральных чисел, который носит название «Алгоритм Евклида».

**Новизна** темы заключается в том, что она не изучается в школьном курсе математики, но для решения некоторых задач просто необходима.

**Объект исследования:** алгоритм Евклида

**Предмет исследования**: нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида

**Методы исследования:** изучение дополнительной литературы, решение задач, исследование.

**Гипотеза**. Целесообразно ли использование алгоритма Евклида

при нахождении НОД натуральных чисел

**Цель работы**: исследовать новые способы нахождения НОД натуральных чисел – алгоритм Евклида

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи:**

* Познакомиться с алгоритмом Евклида
* Показать его применение при решении задач на нахождение НОД чисел
* Изучить дополнительную литературу и материалы Интернет для исследования Алгоритма Евклида

**Ожидаемые результаты:**

- знать и уметь правильно употреблять термины, связанные с понятием делимости;

- уметь понимать смысл условий задач;

- уметь представлять алгоритм Евклида;

- знать и уметь правильно переходить от одного шага алгоритма к другому шагу;

- уметь пользоваться простейшими приёмами применения алгоритма Евклида при нахождении НОД чисел;

- уметь пользоваться справочным материалом для нахождения нужных формул и их использование при решении задач.

**Объем проведенного исследования и уровень сложности использованных методов:**

- анализ математической литературы и ресурсов Интернета по данной теме;

- репродуктивное воспроизведение изученного материала;

- познавательно - поисковая деятельность;

- анализ и сравнение данных в поиске решения задач;

- постановка гипотез и их поверка;

- сравнение и обобщение математических фактов;

- решение задач различных видов;

- анализ полученных результатов;

**Практическое применение полученных исследований:**

Алгоритм Евклида является одной из теоретических основ при решении задач на разложение числа на множители, нахождение наибольшего общего делителя несколькких чисел, решении вопросов делимости и при сокращении дробей.

**Научная и практическая ценность полученных результатов:**

Знание алгоритма Евклида - есть эффективный метод доказательства гипотез (утверждений), основанный на использовании делимости чисел и нахождения наибольшего общего делителя, поэтому он приводит только к верным выводам.

**Основные понятия**

*Натуральное число называют* ***простым***, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число. Например, , 3 – простое число.

*Натуральное число называют* ***составным*,** если оно имеет более двух делителей. Например, , 6 – составное число.

*Наибольшее натуральное число*, на которое делятся без остатка числа а и в, называют ***наибольшим общим делителем.***

Разложение чисел на простые множители помогает найти их наибольший общий делитель.

*Например*, найдем наибольший общий делитель чисел 540 и 2520.

Разложим их на простые множители.

|  |  |
| --- | --- |
| 2520  1260  630  315  105  35  7 | 2  2  2  3  3  5  7 |

|  |  |
| --- | --- |
| 540  270  135  45  15  5 | 2  2  3  3  3  5 |

1

Наибольший общий делитель должен быть кратен любому общему делителю. Значит, разложение наибольшего общего делителя должно содержать все простые множители, которые одновременно входят в разложения обоих данных чисел. Это числа 2, 3 и 5.

Число 2 входит в первое число в степени 2, а во второе – в степени 3. значит, число 540 делится на , но не делится на , а число 2520 делится и на , и на . В наибольший общий делитель число 2 должно войти с показателем степени, равным 2, меньшим из встретившихся в разложениях данных чисел.

Аналогично, число 3 должно войти в наибольший общий делитель с показателем степени, равным 2.

Число 5 в оба разложения входит в первой степени. Так же оно войдет и в наибольший общий делитель.

Итак, НОД(540;2520)=. =180

Сформулируем правило, по которому мы нашли НОД.

***Правило нахождения наибольшего общего делителя.***

*Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел, надо:*

1) разложить их на простые множители;

2) составить произведения из всех простых чисел, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений;

3) каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из тех показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.

В дальнейшем, когда я стала решать задачи, мне встретились такие, что при нахождении наибольшего общего делителя чисел разложением на простые множители стало невозможным использование известных признаков делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 16, 18, 25 и 100.

*Например,*

1) сократите дроби: ;

2) найдите: НОД ( 555; 703), НОД(445; 5665).

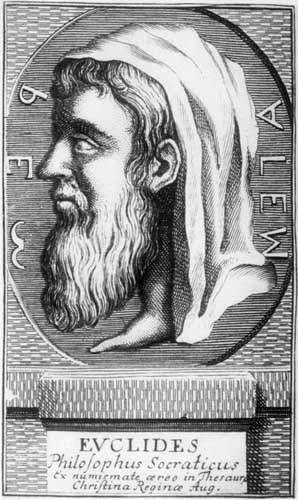
Я зашла в тупик, потому что проверять делимость чисел на все простые числа из таблицы простых чисел оказалось очень трудоемкой работой и требующей больших затрат времени. Я задалась вопросом, а нет ли других способов нахождения наибольшего общего делителя чисел, кроме разложения их на простые множители. Перечитав большое количество литературы, просмотрев ресурсы Интернет, я столкнулась с алгоритмом Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

*ЕВКЛИД Александрийский*

******Евклид (предположительно 330-277 до н.э.) - математик Александрийской школы Древней Греции, автор первого дошедшего до нас трактата по математике. Евклид (возможно) получил образование в Академии Платона (Афины).

Свои труды Евклид писал по единой схеме в форме дедуктивно-систематизированных обозрений открытий древнегреческих математиков классического периода.

Известны такие работы Евклид по математике, как трактаты "О делении фигур", "Конические сечения" (в четырех книгах), "Феномены" (посвященные сферической геометрии), "Поризмы", а также работы по астрономии, музыке и оптике, в которых ведущая роль отводилась математике.

В своем главном труде "Начала" (латинизированное - "Элементы") Евклид в 15 книгах изложил основные свойства пространства и пространственных фигур, т.е. планиметрию, стереометрию и элементы теории чисел как подведение итогов предыдущего развития математики в Древней Греции и закладку оснований для дальнейшего развития математики.

В книге Евклида "Начала" математика выступала, пишет М.Клайн, "...как идеальная версия того, что составляло содержание известного нам реального мира...".

Книга "Начала" Евклида дала возможность создать концепцию логического, математического подхода к познанию природы. Хотя сочинение Евклида предназначалось для изучения физического пространства, структура самого сочинения, его остроумие и ясность изложения стимулировали аксиоматически-дедуктивный подход не только к остальным областям математики, но и ко всем естественным наукам. Через "Начала" Евклид понятие логической структуры всего физического знания, основанного на математике, стало достоянием интеллектуального мира.

В арифметике Евклид сделал три значительных открытия. Во-первых, он сформулировал (без доказательства) теорему о делении с остатком. Во-вторых, он придумал "алгоритм Евклида" - быстрый способ нахождения наибольшего общего делителя чисел или общей меры отрезков (если они соизмеримы). Наконец, Евклид первый начал изучать свойства простых чисел - и доказал, что их множество бесконечно. Но правда ли, что любое целое число раскладывается в произведение простых чисел единственным способом? Доказать это Евклид не сумел - хотя располагал всеми необходимыми для этого средствами.

Историками математики (Цейтен и др.) было выдвинуто предположение, что именно с помощью алгоритма Евклида (процедуры последовательного взаимного вычитания) в древнегреческой математике впервые было открыто существование несоизмеримых величин (стороны и диагонали квадрата, или стороны и диагонали правильного пятиугольника). Впрочем, это предположение не имеет достаточных документальных подтверждений. Алгоритм для поиска наибольшего общего делителя двух натуральных чисел описан также в I книге древнекитайского трактата «Математика в девяти книгах».

Ряд математиков средневекового Востока (Сабит ибн Курра, ал-Махани, Ибн ал-Хайсам, Омар Хайям) попытались построить на основе алгоритма Евклида теорию отношений, альтернативную по отношению теории отношений Евдокса, изложенной в V книге «Начал» Евклида. Согласно определению, предложенному этими авторами, четыре величины, первая ко второй и третья к четвёртой, имеют между собой одно и то же отношение, если при последовательном взаимном вычитании второй величины в обеих парах на каждом шаге будут получаться одни и те же неполные частные.

# *Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя (НОД).*



Слово «Алгоритм» (иногда пишут «алгорифм»- это тоже самое) означает «общий метод, применимый к целому классу задач». Обычно в математике подразумевается, что этот метод можно сформулировать в виде совершенно точного описания – настолько точно и определенно, что любой человек, умеющий только читать и считать, может его выполнить (для любой конкретной задачи, то есть для любых заданных ему значений параметров. Понятие алгоритма тесно связано с понятием программы для вычислительной машины. Чтобы точно определить понятие «алгоритма», нередко описывает воображаемую «машину» и класс допустимых «программ» для этой машины.). Например, мы знаем алгоритм, позволяющий любое натуральное число *а,* записанное в десятичной системе разделить на другое натуральное число *в* с остатком - правило «деления столбиком».

***Алгоритм Евклида*** – это правило, которое позволяет по двум натуральным числам: а и в найти НОД (*а , в).* В принципе для этого можно предложить такой алгоритм:

1. найти все делители числа а (перепробовав все числа: 1,2….., не превосходящие а)
2. найти все общие делители чисел *а* и *в* (проверив, на какие из делителей, *а* делится *в*)
3. выбрать из общих делителей наибольший.

Или другой алгоритм: разложить оба числа на простые множители и воспользоваться следствием из теоремы 2 (Каждое натуральное число разлагается на простые множители единственным образом). Однако, если разложения на простые множители ни одного из данных чисел не известны, а числа большие, требуется много вычислений.

Алгоритм Евклида позволяет найти НОД (*а; в*)в этих случаях значительнее быстрее, не отыскивая всех делителей ни у одного из чисел *а* и *в*.

Этот алгоритм, вопреки своему названию, не был придуман Евклидом, так как упоминание о нём имеется уже в топике Аристотеля. В "Началах" Евклида этот алгоритм описан дважды - в VII книге для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и в X книге для нахождения наибольшей общей меры двух однородных величин. В обоих случаях дано геометрическое описание алгоритма для нахождения "общей меры" двух отрезков.

Алгоритм Евклида основан на таком факте:

Пусть *а=вq+r*, тогда НОД(*а; в*)=НОД(*в; r*)

Покажем что у пары чисел (*а ; в)*множество общих делителей в точности такое же как у пары чисел (*а; r*) отсюда конечно будет следовать что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем что каждый общий делитель чисел является делителем числа *r* и наоборот что каждый общий делитель чисел *в* и *r* является делителем числа *а.*

Докажем сначала первое утверждение. Пусть *а* и *в* делятся на *m*. Тогда вq делится на *m* *и а-вq=r* делится на *m.*

Перейдём ко второму утверждению. Если *в и r* делятся на *k*, то *вq* делится на *k* и *а=вq+r* делится на *k*.

Доказанное утверждение позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

**Пример 1**. Найти НОД (273; 1014).

Решение. Выполняем деление с остатком:

1014=273\*3+195 НОД (273,1014)=

273=195\*1+78 =НОД(195,273)=

195=78\*2+39 =НОД(195,78)=

78=39\*2 =НОД(78,39)= 39

Ответ. НОД (273; 1014)=39

Алгоритм Евклида в общем случае можно описать так. Если у вас имеется два числа а и в, причем *a>b>0,*  то сначала делим *а* на *в* и получаем остаток r1,  который меньше, чем в. Затем делим число в на r1  и находим остаток r2 , который меньше чем r1. Далее, мы делим r1 на число r2 , при этом получаем остаток r3 , меньший, чем r2 и так далее, пока какой-нибудь остаток  не разделится на остаток rn нацело, без остатка (т.е. =0)

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки неотрицательные числа. Последний остаток и есть НОД(*а;в*). Действительно,



## *Описание алгоритма нахождения НОД делением*

   1. Большее число делим на меньшее.  
   2. Если делится без остатка, то меньшее число и есть НОД (следует выйти из цикла).  
   3. Если есть остаток, то большее число заменяем на остаток от деления.  
   4. Переходим к пункту 1.  
  
**Пример 2.** Найти НОД (30; 18).  
30/18 = 1 (остаток 12)  
18/12 = 1 (остаток 6)  
12/6 = 2 (остаток 0). Конец: НОД – это делитель. НОД (30, 18) = 6

Примечание к коду. В цикле в *a* или *b* записывается остаток от деления. Когда остатка нет (мы не знаем в *а* он или *b*, поэтому проверяем оба условия), то цикл завершается. В конце выводится сумма *a* и *b*, т.к. мы не знаем, в какой переменной записан НОД, а в одной из них в любом случае 0, который на результат суммы никак не влияет.

## *Описание алгоритма нахождения НОД вычитанием*

   1. Из большего числа вычитаем меньшее.  
   2. Если получается 0, то значит, что числа равны друг другу и являются НОД (следует выйти из цикла).  
   3. Если результат вычитания не равен 0, то большее число заменяем на результат вычитания.  
   4. Переходим к пункту 1.  
  
**Пример 3.** Найти НОД (30; 18).  
30 - 18 = 12  
18 - 12 = 6  
12 - 6 = 6  
6 – 6 = 0 Конец:

НОД – это уменьшаемое или вычитаемое. НОД (30, 18) = 6

Когда числа сильно отличаются друг от друга, найти их общий делитель помогают оба алгоритма нахождения НОД делением и вычитанием.

**Пример 4**. Найти НОД (276; 52 338).

Решение. Разделим с остатком 52 338 на 276:

52 338=276 \* 189 + 174

52 338 – 276 \* 189 = 174. Отсюда следует, что НОД (276; 52 338) = НОД (276; 174).

Продолжим последовательно упрощать задачу.

276 – 174 = 102, значит, НОД (276; 174) = НОД (174; 102).

174 – 102 = 72, значит, НОД (174; 102) = НОД (102; 72).

102 – 72 = 30, значит, НОД (102; 72) = НОД (72; 30).

72 – 30 \* 2 = 12, значит, НОД (72; 30) = НОД (30; 12).

30 – 12 \* 2 = 6, значит, НОД (30; 12) = НОД (12; 6).

12 = 6 \*2, значит, НОД (12; 6) = 6.

Ответ. НОД (276; 52 338) = 6.

**Заключение**

Изучив алгоритм Евклида, я пришла к **выводу**, что этот способ является универсальным для решения задач на нахождение наибольшего общего делителя натуральных чисел в случае, когда числа сильно отличаются друг от друга и их нельзя разложить на простые множители, используя известные признаки делимости чисел.

Я поделилась своими исследованиями со своими одноклассниками и познакомила их с понравившимся мне алгоритмом Евклида, а также рассказала им краткую биографию этого знаменитого ученого Древней Греции.

**Терминологический словарь**

*Делителем* *натурального числа* *а* называют натуральное число, на которое *а* делится без остатка.

*Кратным натурального числа а* называют натуральное число, которое делится без остатка на *а.*

*Натуральное число называют* ***простым***, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

*Натуральное число называют* ***составным*,** если оно имеет более двух делителей.

*Наибольшее натуральное число*, на которое делятся без остатка числа а и в, называют ***наибольшим общим делителем.***

*Евклид* (предположительно 330-277 до н.э.) - математик Александрийской школы Древней Греции, автор первого дошедшего до нас трактата по математике

*Алгоритм* (иногда пишут «алгорифм»- это тоже самое) означает «общий метод, применимый к целому классу задач».

*Степенью числа а с натуральным показателем n* называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *а*

*Признаки делимости.*

На 2 делятся те и только те числа, у которых цифра разряда единиц четная, т.е. однозначное число записанное этой цифрой, делится на 2. Таких цифр пять – 0, 2, 4, 6, 8.

На 5 делятся те и только те числа, у которых в разряде единиц стоят цифры 0 или 5.

На 10 делятся те и только те числа, у которых в разряде единиц стоит цифра 0.

На 4 делятся те и только те числа, последние две цифры которых образуют число, делящееся на 4.

На 3 делятся те и только те числа, сумма цифр которых кратна 3.

На 9 делятся те и только те числа, сумма цифр которых кратна 9.

На 25 делятся те и только те числа, последние две цифры которых образуют число, делящееся на 25.

На 6 делятся те и только те числа, которые кратны 2 и 3.

На 12 делятся те и только те числа, сумма цифр которых кратна 3 и последние две цифры образуют число, делящееся на 4.

На 18 делятся те и только те четные числа, сумма цифр которых кратна 9.

На 100 делятся те и только те числа, у которых в разряде единиц стоят две цифры 0.

**Список использованной литературы.**

1. Математика. 6 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений / Г.К.Муравин, О.В.Муравина. – 4-е изд., дораб. – М. : Дрофа, 2010. – 319 с. : ил.
2. Математика. 6 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений / Н.Я.Виленкин, В.И.Жохов, А.С.Ченоков, С.И.Шварцбурд. – 24-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 288 с. : ил.
3. За страницами учебника математики: Кн. для учащихся 5-6 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.: ил.
4. Интернет-ресурсы: [*ru.wikipedia.org*](http://ru.wikipedia.org/) *›* [*wiki*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%D0%9D%D0%9E%D0%94)*;*

[*world-python.org*](http://world-python.org/) *›* [*article/algorithm/1970…evklida…*](http://world-python.org/article/algorithm/1970-algoritm-evklida-naxozhdenie-naibolshego-obshhego.html)

[*http://portfolio.1september.ru/subject.php?sb=8*](http://portfolio.1september.ru/subject.php?sb=8)

[*http://festival.1september.ru/articles/subjects/1/?page=3*](http://festival.1september.ru/articles/subjects/1/?page=3)

**Приложения**

**Задания.**

1. Разложите числа на простые множители и найдите их наибольший общий делитель.

1) 690 и 234; 2) 590 и 700; 3) 3096 и 5076; 4) 1425 и 3105;

5) 3960 и 10200; 6) 30500 и 17750.

2. Запишите в виде несократимой дроби:



3.Сократите дроби:

;

1. Найдите:

НОД ( 555; 703), НОД(445; 5665), НОД (378; 3850), НОД (391; 1288)